PSI – PSI* 2015 – 2016

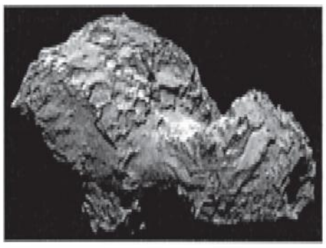
DM Physique N°6

Rosetta est une mission spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil.

La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

PREMIÈRE PARTIE
ATTERRISSAGE DU MODULE PHILAE

Données :



- *masse de la comète :* $m_{com} = 1{,}0.10^{13}\ kg$
- *masse volumique de la comète :* $\mu_{com} = 400\ kg \cdot m^{-3}$
- *période de rotation propre de la comète :* $T_{com} = 12{,}4\ h$
- *constante gravitationnelle :* $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- *distance de largage par rapport au centre :* $r_{larg} = 22{,}5\ km$
- *masse de la sonde Rosetta :* $m_{ros} = 1500\ kg$
- *masse de l'atterrisseur Philae :* $m_{ph} = 98\ kg$
- *vitesse de la lumière dans le vide :* $c = 3{,}00.10^8\ m \cdot s^{-1}$

Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique μ_{com}.

La distance entre un point M et le centre O de la comète est notée $r = OM$.

A / CHAMP GRAVITATIONNEL DE LA COMETE

A1. Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète.

A2. Montrer, en appliquant soigneusement le théorème de Gauss, que le champ gravitationnel $\vec{g}_{com}$ dû à la comète, s'écrit $\vec{g}_{com} = -G\frac{m_{com}}{r^2}\vec{e}_r$ (pour $r > r_{com}$).

A3. Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de la relation obtenue.

A4. Peut-on considérer le champ gravitationnel de la comète uniforme lors de la chute du module Philae, suite à son largage ?

B / TRAJECTOIRE DE PHILAE

Approche numérique de l'équation du mouvement

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur $\vec{e}_r$ pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r$). Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

B1. Etablir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.

Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance r est représentée sur la figure 1, à partir de la distance initiale $r(t = 0) = r_{larg}$, pour différentes vitesses verticales initiales $v_0 = \dot{r}(t = 0)$.

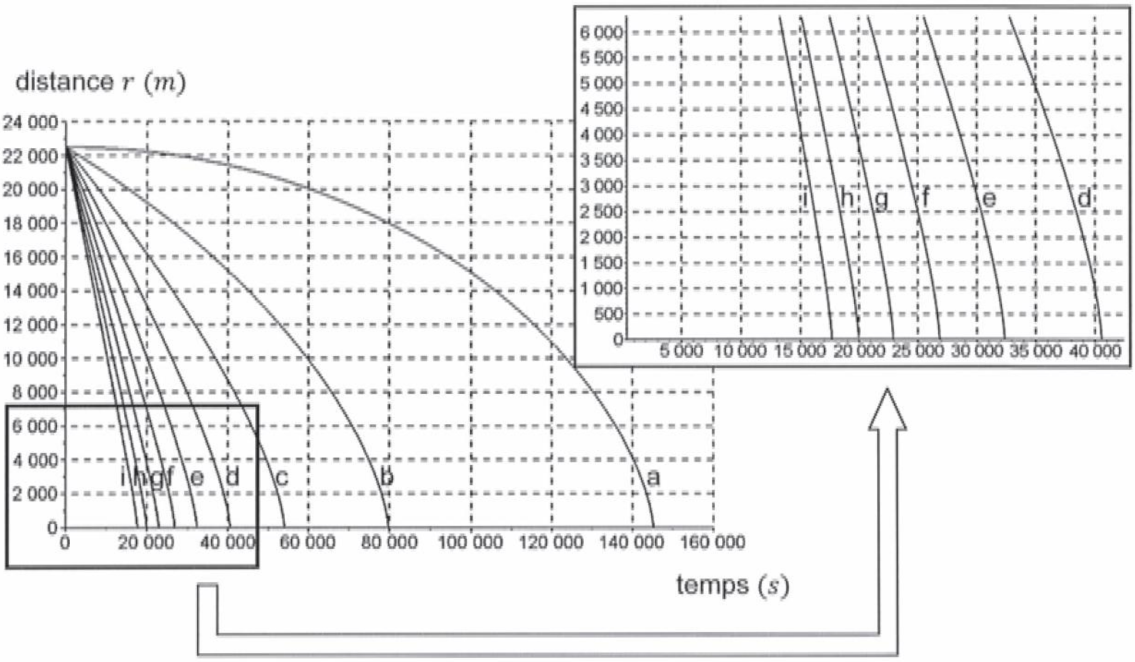


Figure 1 - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :
a : $v_0 = 0\ m \cdot s^{-1}$ b : $v_0 = -0{,}15\ m \cdot s^{-1}$ c : $v_0 = -0{,}30\ m \cdot s^{-1}$
d : $v_0 = -0{,}45\ m \cdot s^{-1}$ e : $v_0 = -0{,}60\ m \cdot s^{-1}$ f : $v_0 = -0{,}75\ m \cdot s^{-1}$
g : $v_0 = -0{,}90\ m \cdot s^{-1}$ h : $v_0 = -1{,}05\ m \cdot s^{-1}$ i : $v_0 = -1{,}20\ m \cdot s^{-1}$

B2. Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.

B3. La durée réelle de la chute est $\tau \simeq 7\ h$. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.

Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse verticale initiale.

B4. Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

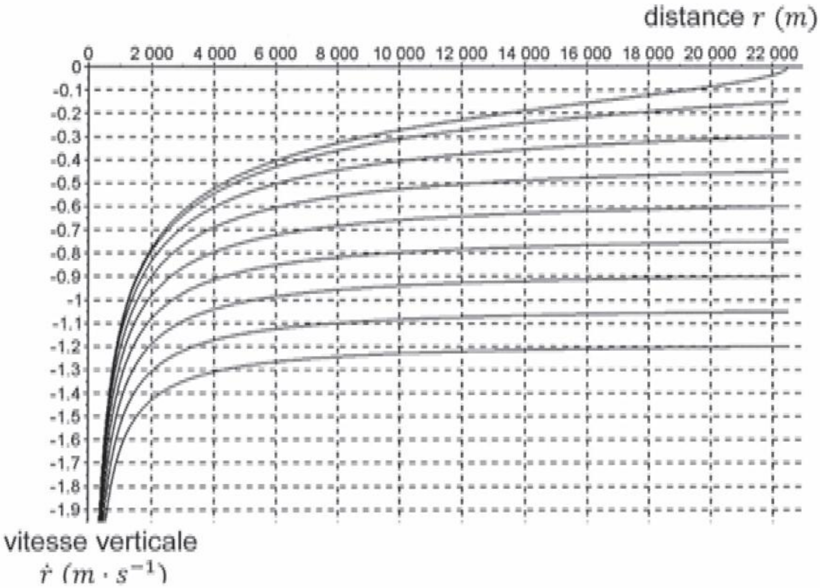


Figure 2 - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales

Approche énergétique

L'objectif est de retrouver la vitesse atteinte par l'atterrisseur au moment du contact avec la comète.

B5. Etablir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{p_{com}}$ d'un point matériel de masse m situé à la distance $r > r_{com}$ du centre de la comète, en fonction de G, m, m_{com} et r (on fixe $E_{p_{com}}(r \to \infty) = 0$).

B6. Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur.

B7. En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète.

C / PHILAE A LA SURFACE DE LA COMETE

On s'intéresse à présent au module Philae, une fois celui-ci posé sur la surface de la comète.

C1. Lors du largage de Philae, le 12 novembre 2014, plusieurs journalistes commentent l'événement : « Philae pèse 1,7 g sur la comète ». Qu'en pensez-vous ?

D / ROSETTA AUTOUR DE LA COMETE

Avant de larguer l'atterrisseur Philae, la sonde Rosetta s'est rapprochée par paliers de la comète. Le 10 septembre 2014, elle se situe sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 30\ km$.

D1. Donner les expressions en coordonnées polaires de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M en mouvement circulaire.

D2. Exprimer la vitesse v_1 de la sonde en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la comète, en fonction de G, m_{com} et r_1. Effectuer l'application numérique.

D3. En déduire sa période T_1. Effectuer l'application numérique.

La sonde parcourt, à partir du 8 octobre 2014, une orbite elliptique avec un apocentre A situé à la distance $r_a = r_{max} = 20\ km$ du centre O de la comète et un péricentre P caractérisé par $r_p = r_{min} = 10\ km$. Le 15 octobre, la propulsion est utilisée pour placer la sonde sur une orbite circulaire de rayon $r_p = 10\ km$.

D4. Représenter sur un schéma l'orbite elliptique, en faisant apparaître le centre O de la comète, ainsi que les distances r_a et r_p.

D5. Exprimer l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite elliptique.

D6. Sur cette orbite, en déduire la vitesse v_p de Rosetta en P, en fonction de G, m_{com}, r_a et r_p. Effectuer l'application numérique.

D7. Pour placer la sonde en orbite circulaire de rayon r_p, la propulsion est utilisée lorsque Rosetta est au péricentre. Préciser numériquement la variation de vitesse nécessaire.

DEUXIEME PARTIE
COMMUNICATION AVEC LA TERRE

D'après Sciences et Avenir, 12 septembre 2014 :

« Loin des yeux mais pas loin du cœur. La sonde Rosetta a beau naviguer dans l'espace à plus de 400 millions de kilomètres de la Terre, elle donne de ses nouvelles en permanence aux équipes de l'agence spatiale européenne. "En ce moment, elle communique 24 heures sur 24 afin de transmettre toutes les données qu'elle recueille sur la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko", précise Sylvain Lodiot, responsable ESA des opérations sur Rosetta.

Envoyées par ondes radio sur deux fréquences (proches de 8 GHz), les informations mettent aujourd'hui 20 minutes environ à nous parvenir et sont captées par plusieurs stations de l'ESA et de la NASA situées en Australie, en Espagne, en Argentine et aux Etats-Unis. »

E / PROPAGATION DANS LE VIDE

On se propose d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques entre la sonde Rosetta et la Terre, dans le vide.

Données :
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$
- *vitesse de la lumière dans le vide :* $c = 3{,}00.10^8\ m \cdot s^{-1}$

E1. Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Comment se simplifient-elles dans le vide ?

E2. Etablir l'équation de propagation dans le vide vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$. Donner celle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$.

E3. En déduire la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide, en fonction de ε_0 et μ_0.

On considère une onde électromagnétique, pour laquelle le champ électrique en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{E} = E_x \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_x + E_z \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_z$$

E4. Dans quelle direction se propage cette onde ? Comment peut-on la qualifier ?

E5. Exprimer son nombre d'onde k en fonction de ω et c.

E6. Simplifier l'expression proposée du champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

E7. Le champ magnétique $\vec{B}$ associé s'écrit :

$$\vec{B} = B_x \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_x + B_y \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_y + B_z \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_z$$

Déterminer les constantes B_x, B_y et B_z en fonction de E_x et c.

E8. Cette onde est-elle transversale ou longitudinale ?

E9. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à cette onde. Calculer sa valeur moyenne en fonction de E_x, μ_0 et c, rappeler sa signification physique et commenter sa direction.

F / RECEPTION DU SIGNAL

F1. Au moment du largage de Philae, le délai de communication entre Rosetta et la Terre est de 28 minutes et 20 secondes. Calculer la distance entre la Terre et la comète à cet instant.

Les deux canaux attribués à la sonde Rosetta pour communiquer avec la Terre sont $f_1 = 8421{,}79\ MHz$ et $f_2 = 8423{,}15\ MHz$.

Pour déterminer la vitesse relative v de la comète par rapport à la Terre (la comète se rapproche de la Terre), on mesure la fréquence f' du signal reçu, correspondant à la fréquence d'émission f (on assimile la vitesse de la comète à celle de Rosetta).

F2. On considère qu'à l'instant t_0, la comète se situe à la distance L de la Terre. Le signal sinusoïdal émis est alors maximum. Déterminer l'instant t'_0 correspondant à l'arrivée de ce maximum sur la Terre.

F3. Exprimer, en fonction de t_0 et f, l'instant t_1 auquel sera émis le maximum suivant du signal. En déduire la distance L' qu'il lui faut parcourir pour atteindre la Terre, puis la date t'_1 correspondant à l'arrivée de ce second maximum sur Terre.

F4. Déterminer la période T' qui sépare l'arrivée sur Terre des deux maximums successifs d'une sinusoïde de fréquence f émise par Rosetta. En déduire, au 1er ordre en $\frac{v}{c}$, $f' = f\left(1 + \frac{v}{c}\right)$.

F5. Calculer numériquement la vitesse v de la comète sachant que $f'_1 = 8422{,}29\ MHz$, puis déterminer la fréquence f'_2 correspondant à un signal émis de fréquence f_2.

G / PRISE EN COMPTE DE L'IONOSPHERE

Pour atteindre la surface de la Terre, les ondes électromagnétiques émises par Rosetta doivent traverser l'atmosphère. Celle-ci peut être assimilée au vide en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques, à l'exception d'une couche située entre $60\ km$ et $800\ km$ d'altitude : l'ionosphère.

Sous l'influence du rayonnement solaire, le gaz présent dans l'ionosphère se comporte comme un plasma, contenant des ions positifs (masse m_p et charge $+e$) et des électrons (masse m_e et charge $-e$), avec une densité volumique n.

Les charges sont soumises à l'action de l'onde électromagnétique. Celle-ci est décrite par : $\vec{E} = E_x \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_x$ et $\vec{B} = \frac{E_x}{c}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\vec{e}_y$. En notation complexe, $\underline{\vec{E}} = E_x e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x$ et $\underline{\vec{B}} = \frac{E_x}{c} e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_y$

G1. Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur une charge q qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ et préciser pourquoi il est possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique.

G2. On note respectivement $\vec{v}_p$ et $\vec{v}_e$ les vitesses des ions positifs et des électrons. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun des porteurs de charge pour exprimer les grandeurs complexes $\underline{\vec{v}}_p$ et $\underline{\vec{v}}_e$ (le poids est négligé devant la force électrique).

G3. En déduire la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le plasma et indiquer pourquoi on peut simplifier son expression pour écrire : $\underline{\vec{j}} = -i\frac{ne^2}{\omega m_e}\underline{\vec{E}}$.

G4. Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le plasma sous la forme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \varepsilon_0\mu_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$, où ω_p est une constante à exprimer en fonction de n, e, m_e et ε_0.

G5. Etablir l'équation de propagation alors vérifiée par le champ électrique. En déduire l'expression de k^2, en fonction de c, ω_p et ω. Comment cette relation est-elle nommée ?

G6. Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_p$?

G7. Pour $\omega > \omega_p$, exprimer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g. Commenter.

G8. Simplifier les deux expressions pour $\omega \gg \omega_p$. Commenter le choix des fréquences $f_1 = 8421{,}79\ MHz$ et $f_2 = 8423{,}15\ MHz$ pour assurer la communication entre Rosetta et la Terre, sachant que $\omega_p \sim 10^7\ rad \cdot s^{-1}$ pour l'ionosphère terrestre.