DM N°7 – Partie II - corrigé

10.

Utilisons l'équation de conservation de la charge en donnant une petite épaisseur e à la couche ; on a alors : $\rho = \frac{\sigma}{e}$ et $\vec{j} = \frac{\vec{j}_s}{e}$ et en faisant tendre e vers 0, j et ρ tendent vers l'infini mais σ et j_S restent finis, si bien que l'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$div\left(\vec{j_s}\right) + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0, \text{ ou encore } \frac{\partial \underline{j_s}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0.$$

On en déduit $$\underline{\sigma}(z,t) = \frac{K}{\omega}.\underline{j_s}(z,t) = \frac{K}{\omega}.J_{sM}.exp\, i\,(Kz - \omega t)$$

11.

Le plan Oyz est plan de symétrie de la distribution de charges et de courants, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan. La distribution est invariante par translation selon Ox, donc $\vec{E}$ ne dépend pas de x, d'où le résultat demandé.

12.

Première méthode : E_y est la composante normale du champ ; elle subit ici une discontinuité liée à la densité surfacique : $E_y(0^+, z, t) - E_y(0^-, z, t) = \boxed{\frac{\underline{\sigma}(z,t)}{\varepsilon_0}}$

Comme le plan conducteur est plan de symétrie, $E_y(0^+, z, t) = - E_y(0^-, z, t)$; on en tire alors :

$$\boxed{E_y(0^+,z,t) = \frac{\underline{\sigma}(z,t)}{2\varepsilon_0} = \frac{K}{2\varepsilon_0\omega}.J_{sM}.exp\, i\,(Kz - \omega t)}$$

Deuxième méthode : on peut appliquer le théorème de Gauss à la surface d'un parallélépipède, d'épaisseur 2ε comprise entre $y = 0^+$ et $y = 0^-$ et de section dS = dx.dz avec dz << $2\pi/K$.

Toujours avec la symétrie de la distribution, on utilise $\vec{E}\,(-y,z) = -\vec{E}\,(y,z)$.

L'application du théorème fournit : $\boxed{E_y(0^+,z,t) = \frac{\underline{\sigma}(z,t)}{2\varepsilon_0} = \frac{K}{2\varepsilon_0\omega}.J_{sM}.exp\, i\,(Kz - \omega t)}$

13.

Le champ électrique vérifie dans le vide l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Les dépendances de $\vec{E}$ en t et en z sont identiques à celles de j_s, soit pour la composante E_y :

$$\underline{E_y}(y,z,t) = f(y).e^{i(Kz-\omega t)}.$$

On déduit donc de l'équation de propagation projetée sur Oy :

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} - K^2 f(y) = -\frac{\omega^2}{c^2}f(y), \text{ avec } K^2 > \omega^2/c^2 = k^2.$$

La solution est $f(y) = A.exp(-\sqrt{K^2-k^2}.y) + B.exp(+\sqrt{K^2-k^2}.y)$,

Afin que f(y) reste bornée lorsque y -> $+\infty$, on a B = 0.

Par continuité de E en y = 0^+, on a A $= \frac{K}{2\varepsilon_0\omega}.J_{sM}$, soit finalement :

$$\underline{E}_y(y,z,t) = \frac{K}{2\varepsilon_0\omega}.J_{sM}.exp\, i\,(Kz-\omega t).exp(-\sqrt{K^2-k^2}.y)$$

Dans le vide on a $div\,\vec{E} = 0$ soit $\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = 0.$

On en déduit : $\underline{E}_z(y,z,t) = \frac{\sqrt{K^2-k^2}}{iK}\underline{E}_y(y,z,t)$

14.

L'onde dans la région y > 0 est progressive suivant z et stationnaire évanescente suivant y.

Les deux composantes sont déphasées de $\pi/2$.

15.

Les électrons étant non-relativistes, on peut négliger la force magnétique devant la force électrique (et naturellement, le poids également), qui est donc la seule force présente.

En y = 0, on a $E_y = 0$ par symétrie, et $E_z(0,z,t) = E_z(0^+,z,t)$ par continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit donc :

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\,\vec{E}\,(0,z,t)$ (Attention, ici la charge de l'électron est désignée par e)

On en déduit : $\vec{v} = \frac{e}{-im\omega}\vec{E}$.

16.

On a donc : $\vec{j}_s = \rho e\,\vec{v} = \frac{\rho e^2}{-im\omega}\vec{E}\,(0,z,t) = \frac{\rho e^2}{m\omega}\sqrt{K^2-k^2}\frac{1}{2\varepsilon_0\omega}.J_{sM}.exp\, i\,(Kz-\omega t)\,\vec{u}_z$

En comparant cette dernière expression à celle de $\vec{j}_s$ donnée par l'énoncé, on en déduit :

$$\frac{\rho e^2}{m\omega}\sqrt{K^2-k^2}\frac{1}{2\varepsilon_0\omega} = 1, \text{ soit } \sqrt{K^2-k^2} = \frac{2\omega^2}{\Omega_s c}, \text{ avec } k = \omega/c$$

$$\text{ou encore, } K = \frac{\omega}{c}\sqrt{1+\frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}}$$

17.

La relation de dispersion pour une onde plane dans le vide de pulsation ω serait K = ω/c ; elle est donc incompatible avec l'équation de dispersion ci-dessus.