DM de Physique: Centrale MP 2012
corrigé

III. Propagation d'ondes électromagnétiques

III.A Ondes électromagnétiques dans le vide

III.A.1 Les deux relations $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0 \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ forment les équations de structure, tandis que $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ sont les équations aux sources.
On transforme les équations aux divergences par application du théorème d'Ostrogradski en intégrales de flux à travers des surfaces fermées $(\mathcal{S})$, $\boxed{\oint_{(\mathcal{S})} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0}$ (conservation du flux magnétique) et $\boxed{\oint_{(\mathcal{S})} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}Q_{\text{int}}}$ (théorème de Gauss). On transforme de même les équations aux rotationnels par application du théorème de Stokes en intégrales de circulation sur des contours fermés $(\mathcal{C})$, $\boxed{\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$ (loi de l'induction de Faraday) et $\boxed{\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0\left(I + \int \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right)}$ (théorème d'Ampère généralisé).

III.A.2 Dans le vide, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$; on établir l'équation de propagation en calculant de deux manières $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}$, d'une part comme $-\Delta\vec{E}$ puisque $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et d'autre part comme $-\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; finalement, on obtient bien sûr (dans le vide) l'équation de d'Alembert $\boxed{\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$.

III.A.3 L'onde proposé est une onde électromagnétique plane, progressive (de sens de propagation $\vec{e}_x$), monochromatique (de pulsation ω), polarisée rectilignement selon (Oy).

III.A.4 Si on reporte cette forme dans l'équation de d'Alembert, on obtient $k^2 = \omega^2/c^2$ donc ici $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$; c'est l'équation de dispersion. On en déduit que la vitesses de phase ω/k est une constante indépendante de la fréquence : le milieu est donc $\boxed{\text{non dispersif}}$.

III.A.5 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit dans ce cas $\omega\underline{\vec{B}} = \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$ donc $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}\exp\imath(\omega t - kx)\vec{e}_z$ soit en notation réelle $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z}$.

III.A.6 En utilisant les expressions réelles des champs, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ s'écrit ici $\boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e}_x}$. Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S est la puissance électromagnétique rayonnée à travers cette surface. Ce flux représente aussi un débit d'énergie à travers la section

III.B Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

III.B.1 Il suffit ici de reprendre les méthodes ci-dessus, $\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}}$.

III.B.2 Posant $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, il vient donc $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}}$. Pour une onde plane progressive et monochromatique, $\frac{\partial}{\partial t} = \imath\omega$ et $\vec{\nabla} = -\imath\underline{k}\vec{e}_x$ et cette équation de propagation impose l'équation de dispersion $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \imath\omega\mu_0\gamma}$.

III.B.3 **a.** Il suffit de remarquer que $-\imath\underline{k}x = -\imath k_1x + k_2x$ pour en déduire, en repassant aux parties réelles, l'expression demandée, $\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0\mathrm{e}^{k_2x}\exp\imath\left(\omega t - k_1x\right)\vec{e}_y}$.

b. k_1 est le $\boxed{\text{vecteur d'onde}}$ qui décrit la propagation de l'onde ; le signe de k_1 définit le sens de propagation (selon $+\vec{e}_x$ si $k_1 > 0$). La partie imaginaire k_2 décrit une $\boxed{\text{absorption}}$ ou une $\boxed{\text{amplification}}$ de l'onde, selon que le module de $\vec{E}$ est décroissant ou croissant lors de la propagation.
Si $k_1k_2 > 0$, l'amplitude de l'onde $\boxed{\text{augmente}}$ lors de la propagation ; le milieu est donc amplificateur.
Au contraire, si $k_1k_2 < 0$, l'amplitude de l'onde $\boxed{\text{diminue}}$ lors de la propagation ; le milieu est donc absorbant.

c. La vitesse de phase est la vitesse de propagation du terme de phase $k_1x - \omega t$, qu'on écrit aussi $k_1(x - v_\varphi t)$ avec donc $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k_1}}$.

III.B.4 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{\underline{k}}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}}$; elle montre que les champs réels électrique et magnétique sont $\boxed{\text{déphasés}}$ si k_2 est non nul ; ce déphasage est $\Delta\phi = \arg(\underline{k})$.

III.B.5 Revenant aux parties réelles, $\vec{E} = E_0\mathrm{e}^{k_2x}\cos\left(\omega t - k_1x\right)\vec{e}_y$ tandis que du champ complexe $\underline{\vec{B}} = \frac{k_1+\imath k_2}{\omega}\mathrm{e}^{k_2x}\exp\imath\left(\omega t - k_1x\right)\vec{e}_z$ on déduit $\vec{B} = \mathrm{e}^{k_2x}\frac{k_1\cos(\omega t - k_1x) - k_2\sin(\omega t - k_1x)}{\omega}\vec{e}_z$; on en déduit donc $\boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega}\left[k_1\cos^2\left(\omega t - k_1x\right) - k_2\cos\left(\omega t - k_1x\right)\sin\left(\omega t - k_1x\right)\right]\mathrm{e}^{2k_2x}\vec{e}_x}$ dont la valeur moyenne temporelle, montre une (dé)croissance de la puissance rayonnée au fur et à mesure de la propagation, $\boxed{\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{E_0^2k_1}{2\mu_0\omega}\mathrm{e}^{2k_2x}\vec{e}_x}$; au vu des définitions rappelée ci-dessus, on a aussi $\boxed{\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{\varepsilon_0E_0^2c^2}{2v_\varphi}\mathrm{e}^{2k_2x}\vec{e}_x}$.

III.B.6 **a.** La conservation du terme de phase sur la surface $x = 0$ impose la conservation de la $\boxed{\text{pulsation}}$; cette onde se propage dans le milieu (A) en sens inverse de l'onde incidente, d'où le terme de phase en $\omega t + \underline{k}_Ax$. De plus, le champ incident est tangentiel à cette surface et la conservation du champ électrique tangentiel explique que les ondes réfléchie et transmise aient même $\boxed{\text{polarisation}}$ que l'onde incidente.

b. Au vu de l'expression du vecteur de Poynting donnée ci-dessus, sa valeur pour l'onde incidente au point O est $\vec{\Pi}_i(x=0) = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0\omega}\left[k_{A1}\cos^2\left(\omega t\right) - k_{A2}\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\omega t\right)\right]\vec{e}_x$ dont la norme $\|\vec{\Pi}_i(x=0)\| = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0\omega}\left|k_{A1}\cos^2\left(\omega t\right) - k_{A2}\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\omega t\right)\right|$ a pour valeur moyenne $\left\langle\|\vec{\Pi}_i(x=0)\|\right\rangle = \frac{E_{0i}^2}{2\mu_0\omega}k_{A1}$; de même, $\left\langle\|\vec{\Pi}_r(x=0)\|\right\rangle = \frac{|E_{0r}|^2}{2\mu_0\omega}k_{A1}$ et $\left\langle\|\vec{\Pi}_t(x=0)\|\right\rangle = \frac{|E_{0t}|^2}{2\mu_0\omega}k_{B1}$ donc $\boxed{R = \frac{|E_{0r}|^2}{E_{0i}^2}}$ et $\boxed{T = \frac{|E_{0t}|^2}{E_{0i}^2}\frac{k_{B1}}{k_{A1}}}$.

c. En l'absence de tout phénomène dissipatif sur la surface $x = 0$, on a nécessairement $\boxed{R + T = 1}$.

d. Si le vecteur d'onde $\underline{k}_B$ est imaginaire pur, le milieu (B) ne transmet qu'une onde évanescente, qui ne se propage pas : il n'y a donc aucune puissance transmise, $\boxed{T = 0 \text{ donc } R = 1}$. On avait vu en **III.B.4** que les champs électrique et magnétique sont, dans ce cas, déphasés de $\pi/2$; le vecteur de Poynting est donc de moyenne nulle. On trouvait bien sûr le même résultat en **III.B.5** : le vecteur de Poynting moyen est nul si $\underline{k}$ est imaginaire pur.

e. Il s'agit du phénomène de réflexion en bout de ligne de l'onde électrique se propageant dans un câble.

III.C Ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

III.C.1 La force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$ se réduit à sa partie électrique car $\|\vec{v}\wedge\vec{B}\| \leqslant \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{B}\|$, avec par ailleurs, du fait de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ou $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}$; le champ électrique étant transverse (dans un milieu neutre $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$) on en déduit $\|\vec{B}\| = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}\|\vec{E}\|$ donc aussi $\|\vec{v}\wedge\vec{B}\| \leqslant \|\vec{E}\|\frac{\|\vec{v}\|}{\omega/\|\vec{k}\|}$ ce qui permet enfin d'affirmer $\boxed{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|}$.

III.C.2 Puisque l'amplitude du mouvement des électrons reste faible devant λ, une approximation analogue à celle faite dans le cours des ondes acoustiques (exploitation de l'approximation acoustique par ordre de grandeurs) montre que l'accélération particulaire de la particule de fluide de plasma étudiée se résume à l'accélération locale

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Le principe fondamental de la dynamique, en présence de la seule composante électrique de la force de Lorentz, impose donc $\imath m_e\underline{\vec{v}}_e = -e\underline{\vec{E}}$ et $\boxed{\underline{\vec{v}}_e = -\frac{e}{\imath m_e\omega}\underline{\vec{E}}}$. On a évidemment de même $\boxed{\underline{\vec{v}}_i = +\frac{e}{\imath m_C\omega}\underline{\vec{E}}}$ avec $m_C \gg m_e$, ce qui justifie de négliger la contribution des cations au courant électrique $\vec{j} = n_1\left(e\vec{v}_i - e\vec{e}_e\right)$ soit, en notation complexe, $\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}}$ avec $\boxed{\underline{\gamma} = \frac{n_1e^2}{\imath m_e\omega}}$.

III.C.3 On cherche ici la moyenne de $\vec{j}\cdot\vec{E}$, $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{\vec{j}}\cdot\underline{\vec{E}}^*\right)$ soit, la conductivité étant ici imaginaire pure, $\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = 0}$. En l'absence de perte d'énergie (par effet Joule par exemple), ce milieu conducteur peut éventuellement être transparent.

III.C.4 Les équations aux divergences fournissent, dans un milieu partout localement neutre, $\underline{\vec{E}}\cdot\vec{e}_x = 0$ et $\underline{\vec{B}}\cdot\vec{e}_x = 0$ (l'onde est transverse électromagnétique) ; l'équation de Maxwell-Faraday fournit la relation de structure $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}\vec{e}_x}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}$ et enfin l'équation de Maxwell-Ampère fournit $-\imath\underline{k}\vec{e}_x\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\left[\varepsilon_0\imath\omega\underline{\vec{E}} + \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}\right]$ ou, après développement, $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$ où on a introduit la pulsation de plasma définie par $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_1e^2}{m_e\varepsilon_0}}}$. Dans l'ionosphère, $\boxed{\omega_p = 1,78\cdot10^7\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$. La longueur d'onde λ_p associée, dans le vide, à une telle pulsation est $\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2\pi c}{\omega_p}$ donc $\boxed{\lambda_p = 1,06\cdot10^2\ \text{m}}$; il s'agit d'une onde du domaine radio

<u>remarque</u>: on peut aussi établir l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion

III.C.5 **<u>a.</u>** Puisque $\underline{k}^2 < 0$ on a $\boxed{\underline{k} = -\frac{\imath}{c}\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}$, traduisant l'atténuation (sans propagation) du champ électromagnétique dans le plasma.

<u>b.</u> On a directement $\boxed{\vec{E} = E_0\cos(\omega t)\text{e}^{-x/\delta}\vec{e}_y}$ où on a défini une épaisseur caractéristique de l'atténuation de l'onde dans le plasma, $\boxed{\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}}$. À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, $\underline{\vec{B}} = \imath\frac{k_2}{\omega}E_0\exp\imath\left(\omega t - \underline{k}x\right)\vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{B} = B_0\sin(\omega t)\text{e}^{-x/\delta}\vec{e}_z}$ où on a posé $\boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}\sqrt{\omega_p^2/\omega^2-1}}$.

<u>c.</u> Comme attendu, $\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}\langle\sin(2\omega t)\rangle = 0$ donc $\boxed{\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \vec{0}}$: l'onde évanescente ne transporte aucune énergie dans le plasma.

III.C.6

a. On a maintenant $\underline{k}^2 > 0$ donc $\boxed{\underline{k} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$, traduisant la propagation possible, dans les deux sens de l'axe (Ox), d'une onde dispersée dans le plasma.

b. On a directement $\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t \mp \frac{2\pi x}{\lambda})\vec{e}_y}$ où on a défini la longueur d'onde associée à la propagation par $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{|\underline{k}|}}$. Le signe $-$ correspond à la propagation dans le sens positif de l'axe (Ox). À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega} E_0 \exp \imath\,(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{B} = B_0 \cos(\omega t \mp \frac{2\pi x}{\lambda})\vec{e}_z}$ où on a posé $\boxed{B_0 = \pm\frac{E_0}{c}\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$. L'onde électromagnétique est transverse électrique et magnétique, plane, progressive, monochromatique.

c. On obtient $\vec{\Pi} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_x$ soit, en moyenne temporelle, $\boxed{\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \pm\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\vec{e}_x}$.

d. $v_\varphi = \omega/|k_1|$ donc $\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$. Le milieu est dispersif puisque cette vitesse de phase dépend de la pulsation.

e. Dérivant $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, il vient $c^2 = \frac{\omega}{k}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = v_\varphi v_g$ donc $\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$. Cette grandeur mesure la vitesse de déplacement du maximum d'un paquet d'ondes quasi-monochromatique, donc aussi la vitesse de déplacement de l'énergie dans le plasma.

f. On vérifie immédiatement $\boxed{v_\varphi > c > v_g}$; on sait que cette circonstance n'a pas d'importance physique pour v_φ, qui ne mesure la vitesse d'aucun objet matériel.

III.C.7 La fréquence retenue vérifie $\boxed{\omega \gg \omega_p}$; elle permet donc la transmission jusqu'au sol (et retour) des signaux émis par le satellite sans absorption ni dispersion, avec $\boxed{v_\varphi \simeq v_g \simeq c}$.