DM N°2

Dopage d'un semi-conducteur

A.1. à A.4. Cf. Cours.

A.5. De $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_D}{\partial x}$ et $j_D = -D(x)\frac{\partial n}{\partial x}$,

on tire : $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial n(x,t)}{\partial x}\right)$

Les résolutions usuelles conviennent ; par exemple avec les bonnes conditions aux limites et initiales, on peut proposer une méthode de séparation des variables.

A.6. On peut simplement écrire $\vec{j}_T = n(x, t)$.

R : Nous verrons d'autres relations du même type, notamment en mécanique des fluides.

Puis $\vec{j}_{total} = \vec{j}_D + \vec{j}_T = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\, n + n\vec{v}$.

et le bilan devient $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_{total}}{\partial x} = -\frac{\partial j_D}{\partial x} - \frac{\partial j_T}{\partial x}$

soit $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right) = +D\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right) - v\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)$

A.7.1 $N(x,t) = \frac{K}{\sqrt{t}} e^{-\frac{ax^2}{t}}$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}t^{-3/2} + \frac{1}{t^2}\frac{ax^2}{\sqrt{t}}\right] K \cdot e^{-\frac{ax^2}{t}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2ax}{t}\frac{K}{\sqrt{t}} e^{-\frac{ax^2}{t}} \quad \text{puis}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \left[-\frac{2a}{t\sqrt{t}} + \left(\frac{2ax}{t}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\right] K\, e^{-\frac{ax^2}{t}}$$

Et avec l'équation de diffusion $\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= -2aD \\ \text{et } \frac{ax^2}{t^{5/2}} &= \frac{4a^2x^2}{t^{5/2}}D \end{aligned}\right\} \forall x \text{ et } \forall t.$

Soit donc $\underline{a = \dfrac{1}{4D}}$.

2
* Les N_0 atomes / m² introduits en $t=0$ se trouvent à un instant t qcq dans le cylindre de base 1 m² et allant de $x=0$ à $l'\infty$:

$$N_0 \times 1 = 1 \times \int_0^\infty \frac{K}{\sqrt{t}} e^{-\frac{ax^2}{t}} dx, \text{ puis avec}$$

$$u = \sqrt{\frac{ax^2}{t}}, \quad N_0 = \int_0^\infty \frac{K}{\sqrt{t}} e^{-u^2} 2\sqrt{Dt}\, du = K 2\sqrt{D}\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

d'où $\underline{K = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi D}}}$

A.8. 1
* Plus les t_i sont grands, plus la courbe "s'étale" : Il y a de + en + de particules pour les x grands et un maximum de + en + faible en 0 : tendance à l'uniformisation avec une quantité constante de particules $\forall t$.

2
* Pour $\underline{t = 1h}$, $\underline{L \simeq 0{,}7\,\mu m}$.

A.9. $N(L,t) = \frac{1}{2} N(0,t)$ soit $\dfrac{K}{2\sqrt{t}} = \dfrac{K}{\sqrt{t}} e^{-\frac{aL^2}{t}}$

D'où $L^2 = \dfrac{\ln 2}{a} \cdot t$; la régression linéaire donne pour $\underline{L^2 = f(t)}$ une $\underline{\text{droite de pente}}$ $p = \underline{4D \ln 2}$ et $\underline{D = 5\,10^{-17}\,m^2 s^{-1}}$.

DM N°2

Désintégration de l'uranium

A.1. Un noyau U^{235} produit :

$$170\,10^{6} \cdot 1{,}6\,10^{-19}\ J$$

Pour un kg soit pour $\frac{1000}{235}$ moles ou encore $\frac{1000}{235} \cdot 6\,10^{23}$ noyaux, $\underline{\mathcal{E}_{1kg} = 7\,10^{13}\ J/kg}$.

A.2. $\frac{7\,10^{13}}{4{,}2\,10^{9}} = \underline{17000 \text{ tonnes de TNT}}$. C'est énorme.

A.3. $\overset{1}{*}$ $-\operatorname{div}\vec{J}$ correspond au flux de neutrons dû à l'inhomogénéité de concentration $\left(:\left[J(x) - J(x+dx)\right]S\,dt\right)$

$\overset{2}{*}$ ν neutrons sont produits pour 1 consommé

$\rightarrow$ d'où le $(\nu - 1)$.

$\rightarrow$ d'où le terme $\frac{\nu - 1}{\tau} N(x,y,z,t)$ qui est un terme de " création ".

$\overset{3}{*}$ $\rightarrow \tau$ est un temps.

$\rightarrow \frac{(\nu-1)}{\tau} N$ correspond à la variation de N % au temps lors de la désintégration ; on peut donc associer $\frac{1}{\tau}$ à une fréquence de désintégration et τ à l'intervalle de temps moyen entre 2 désintégrations successives.

B.1. ⓐ On utilise le bilan du II.A.3 avec $N_1(r)\,e^{\nu' t/\tau}$ et $\operatorname{div}(D \operatorname{grad} N) = D e^{\frac{\nu' t}{\tau}} \cdot \Delta N_1$

et $\Delta N_1 = \Delta(g/r)$.

Om calcule $* \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{g}{r}\right)\right) = +\frac{1}{r}\frac{d^2g}{dr^2}$ (2)

$$* \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\nu'}{\tau}\,\frac{g(r)}{r}\,e^{\nu' t/\tau}$$

D'où $$\frac{\nu'}{\tau}\,\frac{g(r)}{r} = \frac{D}{r}\,\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{\nu-1}{\tau}\,\frac{g(r)}{r}$$

et $$\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{(\nu-1)-\nu'}{D\tau}\,g = 0.$$

g est en exponentielles réelles si $\nu' > (\nu-1)$
g est en exponentielles complexes si $\nu' < (\nu-1)$

Or $N_1(R) = 0$, donc $g(R) = 0$

$\lim_{r\to 0} N_1$ finie, donc $\lim_{r\to 0} \frac{g(r)}{r}$ finie $\Rightarrow g(0)=0$.

On ne peut avoir ces deux conditions si $\nu' > (\nu-1)$.

Donc $\begin{cases} g(r) = A\cos\left(\frac{r}{r_0}\right) + B\sin\left(\frac{r}{r_0}\right), \text{ avec} \\ \nu' < \nu - 1 \end{cases}$ $\quad r_0 = \sqrt{\frac{D\tau}{(\nu-1)-\nu'}}$

Pour avoir $g(0)=0$, il faut $A=0$

$g(R)=0$, il faut $\sin\left(\frac{R}{r_0}\right) = p\pi$

soit puisque N_1 ne s'annule pas, et donc g non plus, entre 0 et R, $p=1$:

$$r_0 = \frac{R}{\pi}.$$

Soit enfin : $$\begin{cases} g(r) = B\sin\left(\pi\frac{r}{R}\right) \\ (\nu-1)-\nu' = \frac{\pi^2 D\tau}{R^2} \end{cases}$$

(on a bien $(\nu-1) > \nu'$)

(b) $N = N_1(r) e^{\nu' t/\tau}$ donc $\frac{dN}{dt} = \frac{\nu'}{\tau} N$ et

à $r = c^{te}$

$\frac{dN}{N} = \frac{\nu' dt}{\tau}$: $\frac{\nu' dt}{\tau}$ est la variation relative de N durant dt. Cette variation est d'autant plus grande, pour un intervalle dt donné et une fréquence de désintégration $\frac{1}{\tau}$ donnée, que R est grand : + R est grand, plus un neutron produit a de chances de rencontrer un nouvel U^{235} avant de sortir de la boule.

(c) $\nu' < 0$: la réaction en chaîne ne peut pas se maintenir.

$\nu' > 0$: l'auto-entretien des réactions de fission est possible.

(d) $\nu' = 0 \implies R_c = \pi \sqrt{\frac{D\tau}{\nu - 1}}$

(e) $R_c \cong 12$ cm ; $M_c \cong 140$ kg.

B.2. Deux hémisphères que l'on rapproche ...