D'après CCINP PSI 21.

TORNADE

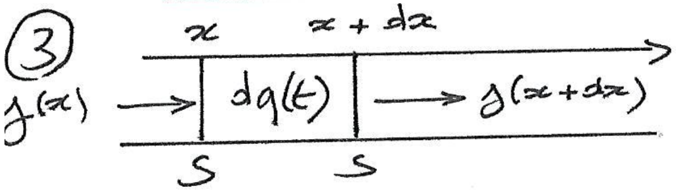
① $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ $\qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

② $\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = 0 = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0})$

et $\operatorname{div}\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$

③



La variation de la charge élémentaire dq dans dτ est due à la ≠ des flux de $\vec{j}$ en x et x + dx :

$$\frac{\partial(dq)}{\partial t}dt = [\,j(x)S - j(x+dx)S\,]\,dt$$

or $dq = \rho\, d\tau$, soit $\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\tau\, dt = -\left(\dfrac{\partial j}{\partial x}\right)\underbrace{dx\,S}_{d\tau}\,dt$

et $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0.$

④ $\rho \longleftrightarrow \mu$

$\vec{v} \longleftrightarrow \vec{v}$

$\vec{j} \longleftrightarrow \vec{j}_m$ $\qquad$ soit $\operatorname{div}\vec{j}_m = -\dfrac{\partial \mu}{\partial t}$ ou encore

$$\operatorname{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

⑤ $\mu = \text{cte} = \rho_0$ (texte) et $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ $\Big\}$ $\operatorname{div}\vec{v} = 0.$

⑥ $\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{B} = 0\\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{v} = 0\\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\omega}\end{array}\right.$

Ces équations sont formellement identiques.

⑦ $\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S}$

ou $\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma 2\vec{\omega}\cdot d\vec{S}$

soit $\oint_{\Gamma_\Sigma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S}$

ou $\oint_{\Gamma_\Sigma} \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = 2\iint_\Sigma \vec{\omega}\cdot d\vec{S}.$

⑧ De même que les symétries du courant induisent celles de $\vec{B}$ en magnétostatique, celles du tourbillon induisent celle de $\vec{v}$:

* Tout plan contenant Oz est plan de symétrie du tourbillon : en un point M qcq d'un de ces plans, $\vec{v} \perp$ ce plan : $\vec{v} = v(M)\,\vec{e}_\theta$.

* Le tourbillon est invariant par rotation d'angle θ et par translation suivant z (le texte parle d'un cylindre sans mention de hauteur : on le suppose tel que $H \gg R_T$ et $r > R_T$ proche de R_T)

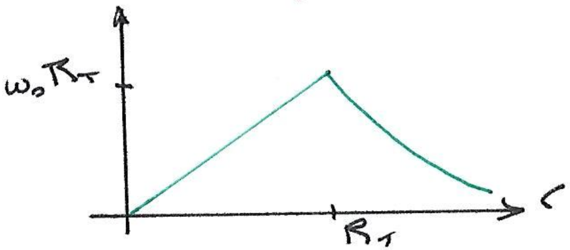
Donc finalement $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_\theta$

* On choisit un cercle de centre sur l'axe Oz et de rayon r :

$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi r v(r)$$

si
$$\begin{cases} r < R_T, & 2\iint_{\Sigma_\Gamma} \vec{\omega}\cdot d\vec{S} = 2\omega_0 \pi r^2 \\ r > R_T, & 2\iint_{\Sigma_\Gamma} \vec{\omega}\cdot d\vec{S} = 2\omega_0 \pi R_T^2 \end{cases}$$

D'où
$$\vec{v}(r < R_T) = \omega_0 r\,\vec{e}_\theta$$
$$\vec{v}(r > R_T) = \omega_0 \frac{R_T^2}{r}\,\vec{e}_\theta$$



R : au voisinage de $r = 0$, $\vec{v}$ est faible : c'est "l'œil" de la tornade (ou du cyclone)

9) cf. Partie I.

L'air est supposé immobile loin de la tornade. Pour une même altitude :

$$0 + \rho_0 g z + P^0 = \rho_0 \frac{v^2(R_T)}{2} + \rho_0 g z + P(R_T)$$

soit $$P(R_T) = P^0 - \frac{\rho_0 R_T^2 \omega_0^2}{2}$$

10) $\Delta P =$ 1500 Pa

11) La densité surfacique de force de pesanteur des tuiles est donc environ $400\ \mathrm{N\,m^{-2}} = 400\ \mathrm{Pa}$

Or $\Delta P =$ 1500 Pa $> 400\ \mathrm{Pa}$: si on ne colle pas les tuiles elles vont s'envoler...

R : la masse de 2,8 kg ne sert pas... On peut juste dire qu'il y a 14 tuiles/m² !