

A full-page background image of a winter scene. A calm river flows through a dense forest of snow-laden evergreen and deciduous trees. The foreground shows snow-covered branches and a fallen log. The overall color palette is cool, with various shades of blue and white.

PFD

COMPLEMENTS

DE COURS





1) Cas du mouvement de rotation

2) Calcul d'une simple composante du moment dynamique

3) Calcul du moment dynamique en un point quelconque

4) Mouvement non galiléen



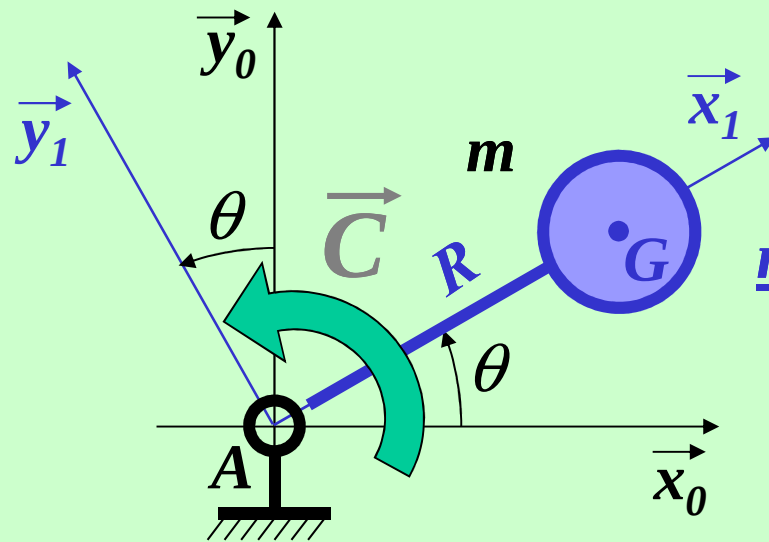
1/4



MOUVEMENT DE ROTATION

(mise en place d'un PFD simple)





$S = \{\text{boule} + \text{barre rigide}\}$

masse ponctuelle m

masse négligée

$m = 1 \text{ kg}$

$AG = R = 1 \text{ m}$

rotation dans le plan horizontal

Couple pour avoir une accélération de 1 rad/s^2 ?

1) Isoler : S

2) BAME : poids boule, pivot avec bâti, couple extérieur

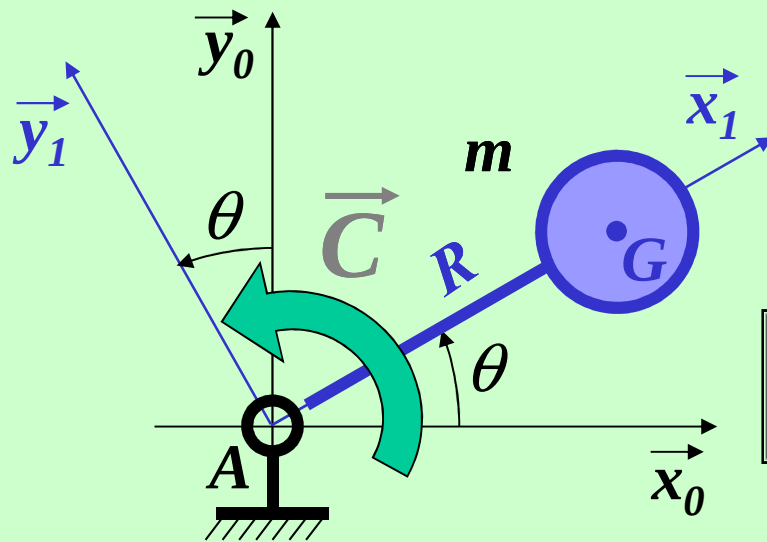
3) PFD : moments en A en projection sur $\vec{z}_0$

pivot parfaite d'axe $A\vec{z}$ couple extérieur d'axe $A\vec{z}$

$$0 + 0 + C = \overrightarrow{\delta(A, S / 0)} \cdot \vec{z}_0$$

↑ poids colinéaire à $A\vec{z}$





Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, S/0)} \cdot \vec{z}_0$

1^{ère} méthode $\longrightarrow$ *calculs en G*

$$\overrightarrow{\delta(A, S/0)} = \overrightarrow{\delta(G, S/0)} + \overrightarrow{AG} \wedge m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}}$$

$\longrightarrow$ G est centre de gravité donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\delta(G, S/0)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma(G, S/0)} \right)_{/0} \\ \overrightarrow{\sigma(G, S/0)} = \tilde{I}(G, S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/0}} \end{cases}$$

matrice nulle car masse ponctuelle

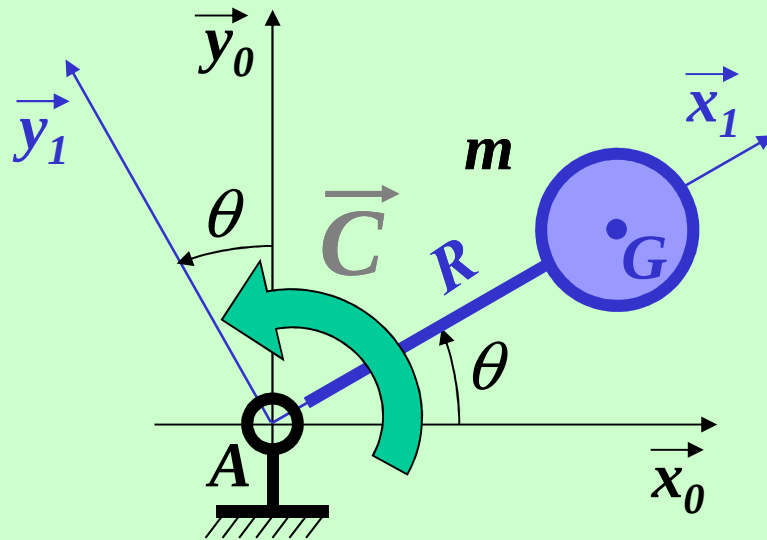
$$\text{d'où } \overrightarrow{\sigma(G, S/0)} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\delta(G, S/0)} = \vec{0}$$

$\longrightarrow$ Par ailleurs : $\overrightarrow{V_{G \in S/0}} = R \dot{\theta} \vec{y}_1$ d'où $\overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}} = R \ddot{\theta} \vec{y}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$

$\longrightarrow$ $\overrightarrow{\delta(A, S/0)} = \vec{0} + R \vec{x}_1 \wedge m \cdot (R \ddot{\theta} \vec{y}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{x}_1) = m \cdot R^2 \ddot{\theta} \vec{z}_1$

finalement

$$\overrightarrow{\delta(A, S/0)} \cdot \vec{z}_0 = m \cdot R^2 \ddot{\theta}$$



Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, S / 0)} \cdot \vec{z}_0$

2ème méthode $\longrightarrow$ **calculs en A**
(point fixe du mouvement de S/0)

A point fixe du mouvement de S/0 donc :

$$\overrightarrow{\delta(A, S / 0)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma(A, S / 0)} \right)_{/0} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\sigma(A, S / 0)} = \tilde{I}(A, S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/0}$$

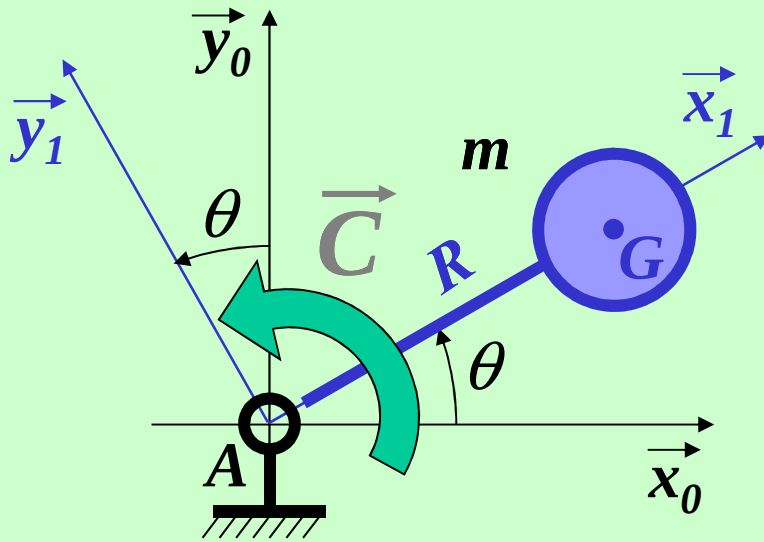
$$\text{et } \tilde{I}(A, S) = \cancel{\tilde{I}(G, S)} + m \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}_{B1} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AG} = R \vec{x}_1$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{\sigma(A, S / 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m R^2 \end{bmatrix}_{B1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m R^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}_{B1} = m \cdot R^2 \dot{\theta} \vec{z}_0$$

finale

$$\overrightarrow{\delta(A, S / 0)} \cdot \vec{z}_0 = m \cdot R^2 \ddot{\theta}$$





Conclusion

On avait

$$C = \overrightarrow{\delta(A, S / 0)} \cdot \vec{z}_0$$

d'où

$$C = m \cdot R^2 \ddot{\theta} = 1 \text{ m N}$$

Autre méthode :

Même démarche : isoler S, BAME, PFD, moments en A sur $\vec{z}$

$$"\Sigma C = J \cdot \ddot{\theta}"$$

avec J le moment d'inertie autour de $A\vec{z}$

$$J_{Az} = \cancel{J_{Gz}^0} + "m \cdot d^2" = m \cdot R^2$$

finalement

$$C = m \cdot R^2 \ddot{\theta}$$



2/4

CALCUL D'UNE SIMPLE *COMPOSANTE DU* *MOMENT DYNAMIQUE*



Soit à calculer :

$$\overrightarrow{\delta(G, 2/0)} \cdot \vec{z}_0$$

Vecteur fixe dans 0

On a : $\overrightarrow{\delta(G, 2/0)} \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}_{/0} \right) \cdot \vec{z}_0$

Si calcul direct $\longrightarrow$ calcul complet de $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}$

Autrement :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}_{/0} \cdot \vec{z}_0}_{u' \cdot v} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} \cdot \vec{z}_0 \right)_{/0}}_{(u \cdot v)'} - \underbrace{\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} \cdot \cancel{\frac{d \vec{z}_0}{dt}}_{/0}}_{u \cdot v'}$$



3/4



CALCUL DU MOMENT

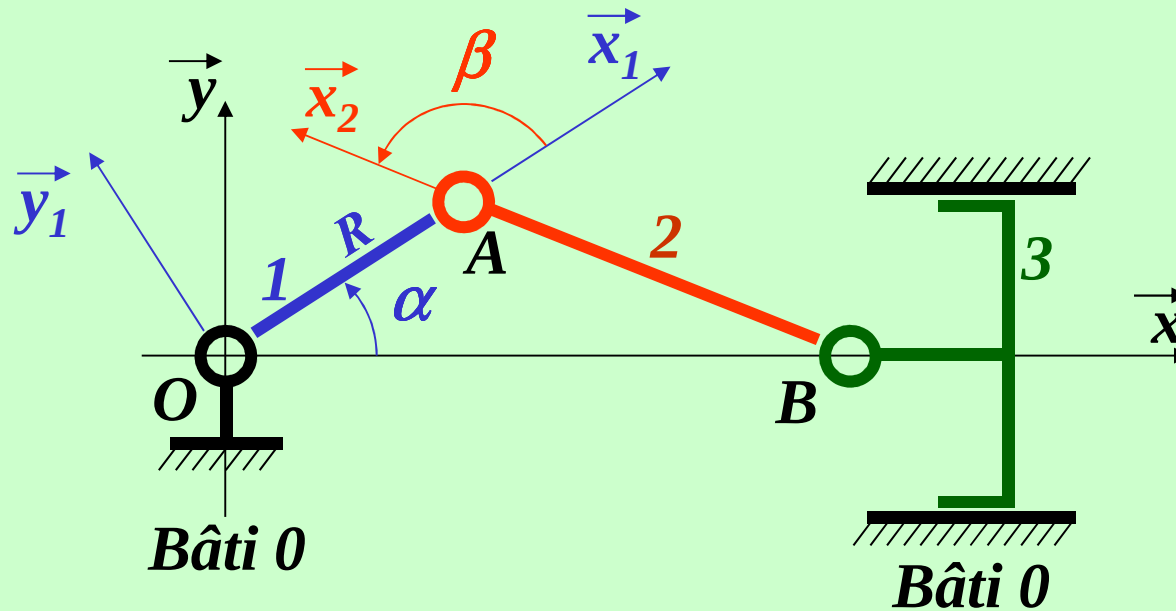
DYNAMIQUE

(en un point quelconque)



$$\overrightarrow{\delta_A(2/0)} = ???$$

A n'est pas un point fixe du mouvement 2/0 !!!



$$\overrightarrow{\delta_A(2/0)} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_A(2/0)}}{dt} \right)_{/0} + \boxed{\overrightarrow{V_{A/0}}} \wedge m \overrightarrow{V(G \in 2/0)}$$

$$\boxed{R \dot{\alpha} \vec{y}_1}$$

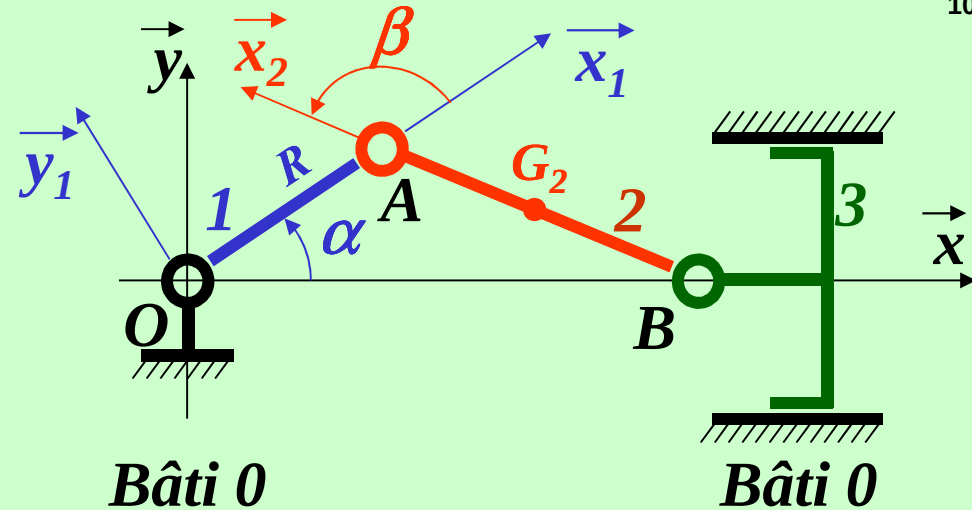
correspond ici à $\overrightarrow{V(A \in 2/0)}$



$$\overrightarrow{\delta_o(2/0)} = ???$$

O n'est pas non plus un point fixe du mouvement 2/0 !!!

Calcul direct en O



- moment cinétique en O : $\overrightarrow{\sigma_o(2/0)} = \tilde{I}(O,2) \overrightarrow{\Omega 2/0} + m_2 \overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{V(O \in 2/0)}$

➡ pas de problème

- moment dynamique en O :

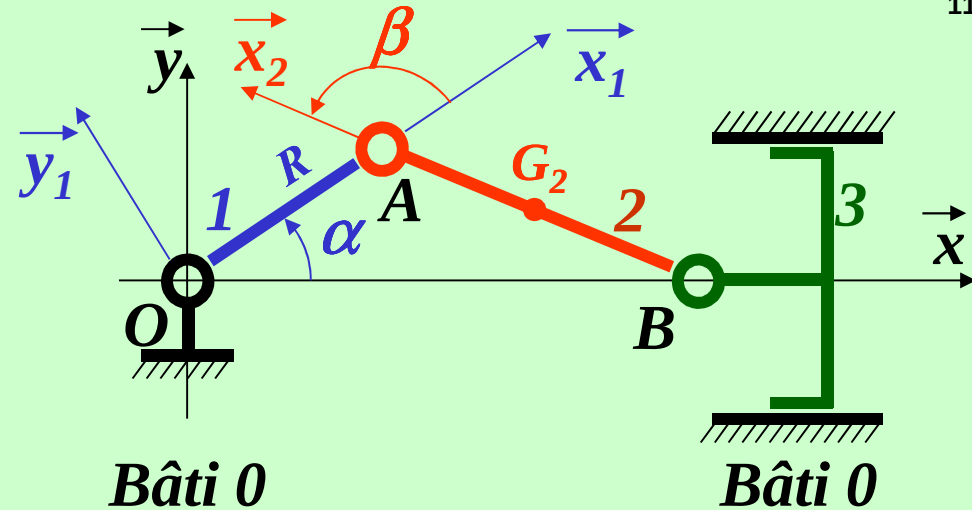
$\vec{0}$

alors que $\overrightarrow{V(O \in 2/0)} \neq \vec{0} !!!$

$$\overrightarrow{\delta_o(2/0)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma_o(2/0)} \right)_{/0} + \boxed{\overrightarrow{VO/0}} \wedge m_2 \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}$$



Calcul de $\overrightarrow{V}(O \in 2/0)$



$$\overrightarrow{V}(A \in 2/1) + \overrightarrow{V}(A \in 1/0)$$

$$\overrightarrow{V}(O \in 2/0) = \overrightarrow{V}(A \in 2/0) + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{2/0}$$

$$= R \dot{\alpha} \vec{y}_1 + R \vec{x}_1 \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_1$$

$$= R \dot{\alpha} \vec{y}_1 - R (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_1$$

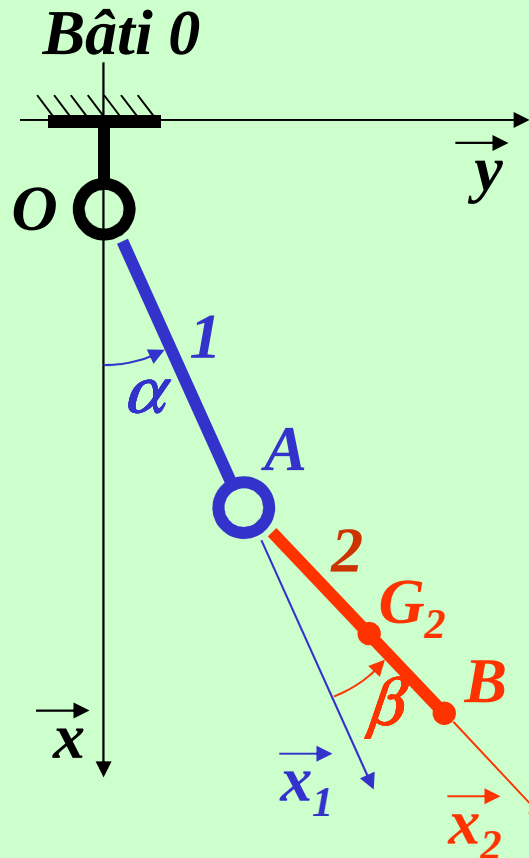
$$= -R \dot{\beta} \vec{y}_1$$



Double-pendule :

$$\overrightarrow{\delta_o(2/0)} = ???$$

O n'est pas un point fixe du mouvement 2/0 !!!



Calcul direct en O

Moment cinétique en O

$$\overrightarrow{\sigma_o(2/0)} = \tilde{I}(O,2) \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + m_2 \overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{V(O \in 2/0)}$$

➡ *pas de problème*

Moment dynamique en O

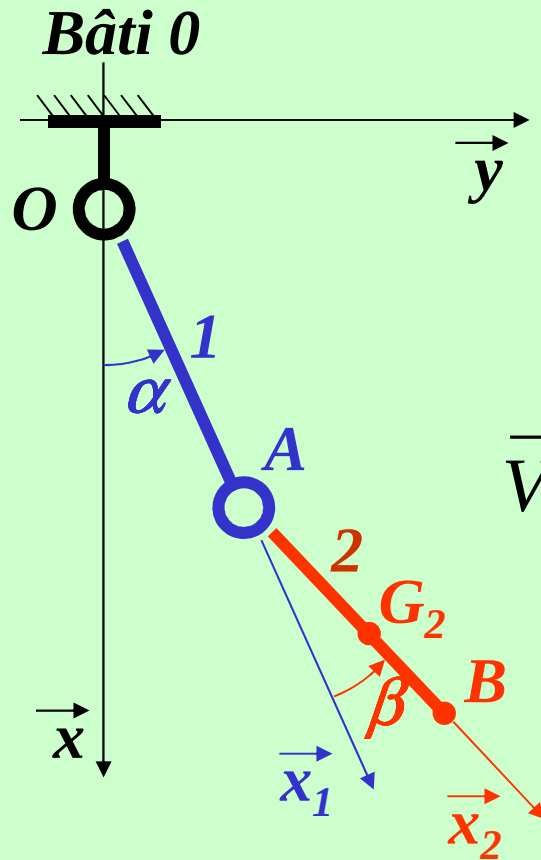
$$\overrightarrow{\delta_o(2/0)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma_o(2/0)} \right)_{/0} + \boxed{\overrightarrow{VO/0}} \wedge m_2 \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}$$

↑
 $\vec{0}$

alors que $\overrightarrow{V(O \in 2/0)} \neq \vec{0}$



Calcul de $\overrightarrow{V}(O \in 2/0)$



$$\overrightarrow{V}(A \in 2/1) + \overrightarrow{V}(A \in 1/0)$$

(Note: $\overrightarrow{V}(A \in 2/1)$ is crossed out with a red line, and $\overrightarrow{V}(A \in 1/0)$ is boxed in red.)

$$\overrightarrow{V}(O \in 2/0) = \overrightarrow{V}(A \in 2/0) + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{2/0}$$

$$= l \dot{\alpha} \vec{y}_1 + l \vec{x}_1 \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_1$$

$$= l \dot{\alpha} \vec{y}_1 - l (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_1$$

$$= -l \dot{\beta} \vec{y}_1$$



4/4

MOUVEMENT

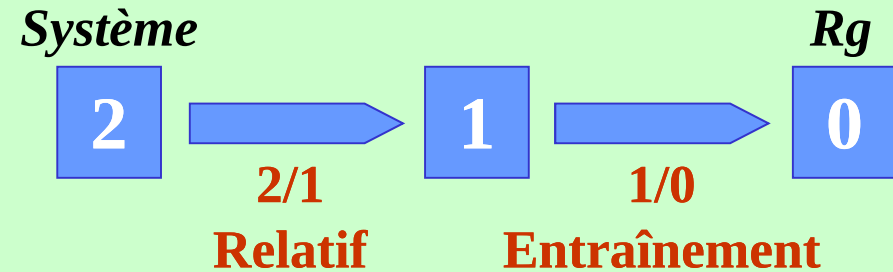
NON GALILEEN



PFD en repère galiléen :

$$\sum \left\{ F_{\text{ext} \rightarrow \text{syst}} \right\}_A = \left\{ D_{\text{syst} / Rg} \right\}_A$$

PFD en repère non galiléen :



Appliquons le PFD pour le mouvement (non galiléen) 2/1

On a toujours : $\sum \left\{ F_{\text{ext} \rightarrow \text{syst}} \right\}_A = \left\{ D_{\text{syst} / Rg} \right\}_A$

d'où $\sum \left\{ F_{\text{ext} \rightarrow \text{syst}} \right\}_A = \underbrace{\left\{ D_{\text{syst} / 1} \right\}_A}_{\text{Relatif}} + \underbrace{\left\{ D_{1 / Rg} \right\}_A}_{\text{Entraînement}} + \underbrace{\left\{ D_{\text{Coriolis}} \right\}_A}_{\text{Coriolis}}$

$$\sum \left\{ F_{\text{ext} \rightarrow \text{syst}} \right\}_A + \underbrace{\left\{ -D_{\text{entraînement}} \right\}_A + \left\{ -D_{\text{Coriolis}} \right\}_A}_{\text{Torseurs des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis}} = \underbrace{\left\{ D_{\text{relatif}} \right\}_A}_{\text{Non galiléen}}$$

**Torseurs des effets d'inertie
d'entraînement et de Coriolis**

Non galiléen

