Mathématiques - Programme de colles 9

du 28 novembre au 2 décembre

Suites réelles

a) Suites de nombres réels

Algèbre des suites de nombres réels. Suites majorées, minorées. Suites bornées. Suites monotones, strictement monotones.

b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la relation $u_n \to a$ équivaut à $u_n - a \to 0$.

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Toute suite convergente est bornée. Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Suites extraites d'une suite. Toute suite extraite d'une suite convergeant vers a converge vers a.

c) Relations de comparaison

Étant donnée une suite $(\alpha_n)_n$ de nombres réels non nuls, définition d'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels dominée par $(\alpha_n)_n$, négligeable devant $(\alpha_n)_n$. Notations $u_n = O(\alpha_n),\ u_n = o(\alpha_n)$. Définition de l'équivalence de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de nombres réels non nuls. Notation $u_n \sim v_n$. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Suites géométriques. Comparaison des suites de référence : $a^n,\ n^\alpha, (\ln n)^\beta, n!, n^n$

d) Théorèmes d'existence de limites

Toute suite croissante majorée $(u_n)_n$ converge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$. Extension au cas d'une suite croissante non majorée.

Suites adjacentes. Théorème des segments emboîtés.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente. (Énoncé seulement.)

e) Brève extension aux suites complexes

Suites à valeurs complexes ; parties réelle et imaginaire d'une suite ; conjugaison. Suites bornées. Limite d'une suite à valeurs complexes.

Toute suite convergente est bornée.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définitions diverses (suite convergente, divergente, divergente vers $\pm\infty$, o, O, $\sim$ ...)
- Toute propriété des suites convergentes, divergentes.
- Équivalent de la série harmonique.
- Théorème des suites monotones.
- Théorème des suites adjacentes.
- Existence de la constante d'Euler.
- Théorème des segments emboîtés.
- Propriétés des suites extraites.

Savoir-faire :

- Calculs d'équivalents, manipulations de $\sim$, O, o.
- Savoir faire une comparaison avec une suite géométrique.
- Savoir mettre en oeuvre une comparaison série-intégrale, comme dans le cas de la série harmonique.
- Être autonome sur l'étude d'une suite : signe éventuel, monotonie éventuelle, utilisation des théorèmes de convergence, calculs spécifiques à la suite considérée...