

## Mathématiques - Programme de colles 8

DU 21 AU 25 NOVEMBRE

### Relations binaires, entiers naturels, réels

#### a) Relations binaires

Relations binaires. Relations d'équivalence, classes d'équivalence et partition. Relations d'ordre, ordre total, partiel, plus grand élément, élément maximal, majorant d'une partie.

#### b) Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.

#### c) Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.

Valeur absolue d'un nombre réel. Inégalités triangulaires :

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \text{et} \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.

Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure. Critères de borne sup/inf.

Définition des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Tout intervalle  $]a, b[$  non vide rencontre  $\mathbb{Q}$  et son complémentaire.

Partie entière d'un nombre réel.

### Suites réelles

#### a) Suites de nombres réels

Algèbre des suites de nombres réels. Suites majorées, minorées. Suites bornées. Suites monotones, strictement monotones.

#### b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence. Lorsque  $a \in \mathbb{R}$ , la relation  $u_n \rightarrow a$  équivaut à  $u_n - a \rightarrow 0$ .

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Toute suite convergente est bornée. Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

### Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Principe de récurrence.
- Définition et critères de borne supérieure, de borne inférieure.
- Partie entière d'un nombre réel (positif ou négatif).
- $\sqrt{2}$  est irrationnel.
- $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .
- Description des intervalles réels. (Toute partie convexe de  $\mathbb{R}$  est du type :  $\emptyset, \mathbb{R}, [a, b], \dots$ )
- Définitions diverses (suite convergente, divergente, divergente vers  $\pm\infty$ ).
- Toute propriété des suites convergentes, divergentes.

### Savoir-faire :

- Tout exercice portant sur les entiers naturels. Raisonnements par récurrence (simple, double, forte).
- Exercices sur les réels (en particulier bornes sup, inf).
- Savoir utiliser les définitions et propriétés des suites convergentes, divergentes vers  $\pm\infty$ .