

## Mathématiques - Programme de colles 6

DU 7 AU 10 NOVEMBRE

### Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$\forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

où  $a, b, c$  sont des scalaires et  $d$  est une application continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme  $t \mapsto e^{\alpha t} P(t)$ , où  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $P$  polynôme à coefficients complexes.

Principe de superposition.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (admis).

### Raisonnement et vocabulaire ensembliste

a) Éléments de logique

Implication, contraposition, équivalence. Négation d'une proposition.

b) Ensembles

Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie). Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence symétrique, passage au complémentaire. Produit cartésien

Ensemble des parties d'un ensemble : notation  $\mathcal{P}(E)$ .

c) Applications et relations

Graphe de  $E$  vers  $F$ . Application d'un ensemble  $E$  dans (vers) un ensemble  $F$ . (Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.)

Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble : notation  $\mathbb{1}_A$ .

Ensemble  $\mathcal{F}(E, F)$  des applications de  $E$  dans  $F$ . Familles  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments d'un ensemble  $E$  indexées par un ensemble  $I$ .

$\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i$ . Partitions.

Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque : Notation  $f^{-1} \langle B \rangle$ .

Injection, surjection. Bijection, réciproque.

Quantificateurs.

### Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Résolution de  $ay'' + by' + cy = 0$ .
- Recherche d'une solution particulière de l'équation  $ay'' + by' + cy = d(x)$  où  $d$  est de type polynôme ou « exponentielle  $\times$  polynôme ».
- Définitions de base sur les ensembles et les applications.
- Formulations diverses avec quantificateurs ( $A \subset B$ ;  $y \in f(A)$ ;  $y \notin f(A)$ ;  $x \in f^{-1} \langle B \rangle$ ;  $f$  est injective,  $f$  est surjective...)
- Définition d'une partition.

### Savoir-faire :

- Résolutions d'équations différentielles linéaires (2<sup>e</sup> ordre).
- Démonstrations soignées de propriétés portant sur les ensembles et les applications.
- Savoir démontrer l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application donnée.
- Savoir démontrer l'inclusion d'un ensemble dans une autre, l'égalité de deux ensembles.