Mathématiques - Programme de colles 21

du 27 au 31 mars

Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

a) Matrices et applications linéaires

Matrice $M(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$ dans un espace vectoriel F muni d'une base $\mathcal{C}$. L'application $u \mapsto M(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Matrice $M(u,\mathcal{B})$ associée à un endomorphisme u d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$.

b) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{K}$. Base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Définition du produit matriciel. Représentation des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par des matrices colonnes et des formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$ par des matrices lignes. Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées à n lignes. Isomorphisme de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ sur l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$. Matrices diagonales, matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Transposée d'une matrice. Addition, multiplication.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations permises sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice. Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels.

Application à l'inversion d'une matrice carrée par l'algorithme du pivot de Gauss.

d) Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonnes). Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire associée.

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme PJ_rQ où P et Q sont des matrices carrées inversibles.

e) Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

Application trace. Propriétés.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition du produit matriciel.
- Interprétation des opérations (somme, produit, inverse) sur les matrices en termes d'application linéaire.
- Caractérisation des automorphismes parmi les endomorphismes.
- Toute matrice M de rang r s'écrit sous la forme PJ_rQ où P et Q sont des matrices carrées inversibles.
- Matrices équivalentes, matrices semblables, changement de bases.
- Lien entre le rang d'une matrice et le rang d'une application linéaire
- Propriétés de la trace.

Savoir-faire :

Tout exercice d'algèbre linéaire portant sur ce programme de colle et les précédents.