Mathématiques - Programme de colles 18

du 6 au 10 mars

Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, d'un sous-espace vectoriel.

Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie.

Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires.

Espace vectoriel produit $E \times F$. Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F.

b) Applications linéaires

Définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d'un endomorphisme.

Réciproque d'une application linéaire bijective. Définition d'un isomorphisme, d'un automorphisme.

Noyau et image d'une application.

Si F et G sont supplémentaires dans E, projection sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G. linéaire.

c) Systèmes de vecteurs

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Sous-espace engendré par un système fini de vecteurs. Définition d'un système générateur. Indépendance linéaire : définition d'un système libre, lié. Définition d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base.

Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Image par une application linéaire d'un système libre, générateur, d'une base.

Théorème de représentation : étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$ et une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire φ et une seule de E dans F telle que $\varphi(e_j) = f_j$.

d) Écriture matricielle (début)

Équation vectorielle associée à un système de vecteurs : existence, unicité des solutions, écriture à l'aide d'un produit matriciel. Interprétation d'une matrice échelonnée (par la méthode du pivot) sur le système de vecteurs associé.

Matrice associée à une application linéaire.

e) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème d'existence de bases, théorème de l'échange, théorème de la base incomplète.

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_j)_j$ et un espace vectoriel F muni d'une base $(\varepsilon_i)_i$, une application linéaire f de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = f(x)$ dans $(\varepsilon_i)_i$ en fonction des coordonnées de x dans $(e_j)_j$.

f) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.
Symétries, projections. Définition, linéarité. Propriétés.
Théorème du rang
Étant donnée une application linéaire f de E dans F, f induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\ker f$ sur $\mathrm{Im}\ f$; en particulier, $\dim\ E = \dim\ \ker f + \dim\ \mathrm{Im}\ f$.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- E (muni d'une base $(e_1 \dots e_n)$) et $\mathbb{K}^n$ sont des espaces vectoriels isomorphes.
- Théorème de représentation, matrice associée à une application linéaire.
- Expression de l'image d'un vecteur par une application linéaire, à l'aide de matrices.
- Définition de $F + G$ et caractérisation comme sommes d'éléments de F et de G.
- $\dim(F + G) = ...$
- F et G sont en somme directe si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F + G$.
- Si $E = F \oplus G$, définition de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Propriétés.

Savoir-faire :

- Systèmes de vecteurs : étudier la dépendance linéaire
- Étude d'applications linéaires, noyau, image...
- Exercices sur les sous-espaces vectoriels (somme directe, sev supplémentaires).