Mathématiques - Programme de colles 17

du 13 au 17 février

Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, d'un sous-espace vectoriel. Exemples : espace $\mathbb{K}^n$, espaces vectoriels de suites ou de fonctions. Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie.

b) Applications linéaires

Définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d'un endomorphisme.

Réciproque d'une application linéaire bijective. Définition d'un isomorphisme, d'un automorphisme.

noyau et image d'une application linéaire.

c) Systèmes de vecteurs

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Sous-espace engendré par un système fini de vecteurs. Définition d'un système générateur. Indépendance linéaire : définition d'un système libre, lié. Définition d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base.

Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Image par une application linéaire d'un système libre, générateur, d'une base.

Théorème de représentation : étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire φ et une seule de E dans F telle que $\varphi(e_j) = f_j$.

d) Écriture matricielle (début)

Équation vectorielle associée à un système de vecteurs : existence, unicité des solutions, écriture à l'aide d'un produit matriciel. Interprétation d'une matrice échelonnée (par la méthode du pivot) sur le système de vecteurs associé. Matrice associée à une application linéaire.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition d'un espace vectoriel, d'un sous-espace vectoriel, critère de sev.
- Espace vectoriel engendré par une partie (définition, caractérisation par les combinaisons linéaires).
- Propriétés des systèmes libres, générateurs. Image d'un système par une application linéaire.
- E (muni d'une base $(e_1 \dots e_n)$) et $\mathbb{K}^n$ sont des espaces vectoriels isomorphes.
- Théorème de représentation.

Savoir-faire :

Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, étude de systèmes de vecteurs, méthode du pivot...
Exercices dans des espaces de polynômes, de fonctions.