**Mathématiques - Programme de colles 16**
du 6 au 10 février

**Dérivabilité**
a) Dérivée en un point, fonction dérivée
Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite. Extrema locaux des fonctions dérivables. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques. Notations $f'$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
Pour $0 \leq k \leq +\infty$, ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivée $n$-ième d'un produit (formule de Leibniz).
Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

b) Étude globale des fonctions dérivables
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis :
- si $m \leq f' \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$,
- si $|f'| \leq M$, alors $f$ est $M$-lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et si $f'$ a une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Brève extension au cas d'une limite infinie.

c) Formules de Taylor
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$ en un point $x$ de $[a, b]$. Majoration du reste : inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ (pour $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$).

**Question de cours (énoncés et démonstrations) :**
- Dérivée de $f+g$, $f \times g$, $f/g, f \circ g$.
- Théorème des fonctions réciproques.
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.
- Inégalité des AF, théorème de la limite de la dérivée.
- Variations d'une fonction.
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Formule de Taylor-Young.

**Savoir-faire :**
Exercices sur la dérivabilité. Utilisation du théorème de Rolle, des AF. Utilisation des formules de Taylor.