

**Mathématiques - Programme de colles 13**  
DU 9 AU 13 JANVIER

**Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$**

Voir programme précédent

**Fonctions numériques**

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Relation d'ordre.

Fonctions majorées, minorées. Fonctions bornées.

Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.

Fonctions monotones, strictement monotones; composition. Fonctions paires, impaires. Fonctions  $T$ -périodiques. Définition des fonctions lipschitziennes.

b) Étude locale d'une fonction : Limite d'une fonction  $f$  en un point  $a$ , continuité en un point.

Lorsque  $b \in \mathbb{R}$ , la relation  $f(x) \rightarrow b$  équivaut à la relation  $f(x) - b \rightarrow 0$ . Lorsque  $a \in \mathbb{R}$ , la relation  $f(x) \rightarrow b$  lorsque  $x \rightarrow a$  équivaut à la relation  $f(a + h) \rightarrow b$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif. Produit d'une fonction bornée au voisinage de  $a$  par une fonction tendant vers 0 en  $a$ . Opérations algébriques sur les limites; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

**Question de cours (énoncés et démonstrations) :**

- Caractérisation de la divisibilité à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.
- Résolution dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de l'équation  $ax + by = c$ .
- Définitions usuelles (parité, monotonie, fonction lipschitzienne, limites, continuité...)
- Toute propriété des limites : somme, produit, quotient... de fonctions admettant une limite.

**Savoir-faire :**

- Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ . Congruences.
- Utilisation de la notion de limite (utiliser les propriétés usuelles des limites mais savoir revenir à la définition si besoin).
- Démontrer qu'une application est continue.