Mathématiques - Programme de colles 12

du 12 au 16 décembre

Structure d'anneau, structure de corps

Définition d'un anneau. Diviseurs de zéro, anneau intègre. Élément nilpotent. Définition d'un corps.
Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers, corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Anneau des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Formule du binôme. Si x et y commutent, on a la relation :

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k.$$

Dénombrements

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini, cardinal d'une partie finie, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

b) p-uplets et combinaisons

Nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n.

Propriétés des coefficients binomiaux.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Axiomes de la structure d'anneau, de corps.
- Homomorphismes, isomorphismes d'anneaux, de corps.
- Un homomorphisme de corps est injectif.
- Cardinal d'un ensemble fini E, cardinal d'une partie de E , cas d'égalité.
- Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.
- Propriétés des cardinaux : produit cartésien, réunion de deux ensembles.
- Nombres d'applications, nombre d'applications injectives.

Savoir-faire :

- Dénombrements. Savoir justifier le calcul d'un cardinal.
- Exercices sur les structures algébriques, notamment savoir utiliser la formule du binôme (et autres relations classiques) **dans un anneau.**