

Mathématiques - Programme de colles 1

DU 19 AU 23 SEPTEMBRE

Techniques fondamentales de calcul en analyse

a) inégalités dans \mathbb{R} . Compatibilité de la relation d'ordre sur \mathbb{R} avec les opérations. Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.

Valeur absolue. Inégalités triangulaires.

Intervalles de \mathbb{R} . Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.

b) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles. Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x) = \lambda$ et $f(x) \geq \lambda$.

Parité, imparité, périodicité. Interprétation géométrique de ces propriétés.

Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte). Bijectivité, fonction réciproque d'une bijection.

Graphe d'une réciproque. Fonctions majorées, minorées, bornées.

c) Dérivation

Équation de la tangente en un point. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Introduction de fonctions pour établir des inégalités. Tableau de variation. Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes, tracé du graphe. Application à la recherche d'extrema et à l'obtention d'inégalités. Interprétation géométrique de la dérivabilité.

d) Fonctions usuelles : sinus, cosinus, tangente ; formules de trigonométrie.

e) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Calculs algébriques

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels ou complexes. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Démonstration d'une des deux inégalités triangulaires.
- Démonstration des formules d'addition du cosinus et du sinus.
- Énoncé et démonstration de toute formule de trigonométrie à partir des formules d'additions.
- Démonstration de la formule de dérivation du produit de deux fonctions à valeurs complexes.
- Démonstration des formules sommatoires classiques (suite géométrique, suite arithmétique...)
- Formule de factorisation de $a^n - b^n$.

Savoir-faire :

- Résolution d'équations et d'inéquations avec valeurs absolues et racines carrées.
- Exercices sur les fonctions d'une variable réelle : étude, obtention d'inégalités, bijectivité et fonctions réciproques...
- Calculs simples de sommes et de produits : changements d'indice, sommes et produits télescopiques...
- Rédiger soigneusement une récurrence.