Colles de mathématique ψ^*
Programme de la quinzaine 11 : 20 au 31 mars

Variables aléatoires discrètes

- définition d'une VAD ;
- si X est une VAD, alors $f(X)$ est une VAD ; tout tuple, produit, CL de VAD est une VAD ;
- loi d'une VAD X : couple $\big(\operatorname{Im} X, (P(X=x))_{x\in\operatorname{Im} X}\big)$; $\sum_{x\in\operatorname{Im} X} P(X=x)=1$;
- pour toute partie B de $\operatorname{Im} X$, $P(X\in B)=\sum_{x\in B} P(X=x)$.

Variables aléatoires réelles discrètes (VARD)

En pratique elles seront toujours à valeurs entières (VAED).

- fonction de répartition, propriétés ;
- obtention de la fonction de répartition à partir de la loi, et réciproque dans le cas où X est entière ;
- définition de l'espérance d'une VARD, théorème de transfert (admis) ;
- si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X>n)$;
- linéarité de l'espérance (admis) ;
- positivité, croissance de l'espérance ;
- si X^2 admet une espérance, alors X aussi ;
- définition de la variance et de l'écart type d'une VARD ;
- X admet une variance ssi X^2 admet une espérance, auquel cas $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$;
- variance de $aX+b$, variance d'une somme de variables indépendantes ;
- inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- fonction génératrice d'une variable entière, rayon, calcul de l'espérance et de la variance ;
- lois usuelles : uniforme, binômiale, géométrique, de Poisson ; pour chacune : situation typique, valeurs de l'espérance et de la variance ;
- caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire ;
- convergence de la loi binômiale vers la loi de Poisson.

Couples de VARD

En deuxième semaine uniquement.

- loi conjointe d'un couple, représentation matricielle ;
- marginalisation : récupération des lois de X et de Y à partir de la loi de (X,Y) ;
- indépendance mutuelle de VARD ; situation typique : les X_i concernent des tirages différents faits dans les mêmes conditions ;
- si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi ;
- fonction génératrice d'une somme de VAED indépendantes ;
- espérance d'un produit de variables indépendantes ;
- covariance d'un couple, variance de la somme.

Preuves exigibles :

- $E(X)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X>n)$;
- si X^2 admet une espérance, alors X aussi, et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$;
- caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire ;
- convergence de la loi binômiale vers la loi de Poisson.