Colles de mathématique ψ^*
Programme de la quinzaine 9 : 6 au 17 février

Intégrales à paramètre

Programme précédent.

Espaces préhilbertiens réels

- définition d'un produit scalaire, produits scalaires classiques sur $\mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $C^0([a,b],\mathbb{R})$, $CL^2(I,\mathbb{R})$;
- inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, norme euclidienne ;
- formule de polarisation, identité du parallélogramme, Pythagore ;
- orthogonalité, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, toute famille de sev orthogonaux est en somme directe ;
- orthogonal d'une partie, propriétés ;
- projection orthogonale sur un sev de dimension finie, calcul de la projection ;
- distance euclidienne d'un point à un sev de dimension finie, meilleure approximation polynomiale d'une fonction continue ;
- inégalité de Bessel.

Espaces euclidiens

- orthonormalisation d'une famille libre, forme de la matrice de passage ;
- existence de bases orthonormales (ON), bases ON adaptées à un sev, etc...
- calculs en base ON : expression des coordonnées, du produit scalaire, de la norme, de la projection orthogonale, de la distance à un sev ;
- représentation des formes linéaires par un produit scalaire ;
- dimension de l'orthogonal d'un sev et conséquences : $F \oplus F^\perp = E$, $F^{\perp\perp} = F$;
- distance euclidienne d'un point de $\mathbb{R}^2$ à une droite, d'un point de $\mathbb{R}^3$ à une droite ou à un plan (vectoriels).

Pas encore traité : endomorphismes orthogonaux.

Preuves exigibles :

- Cauchy-Schwarz ;
- expression de la projection orthogonale de a sur un sev F de dimension finie, connaissant une base de F orthonormée ou non ;
- la distance de a à F est réalisée en $p_F(a)$ et uniquement en ce point ;
- en dimension finie : $\dim F^\perp$, $F \oplus F^\perp = E$, $F^{\perp\perp} = F$.