

Colles de mathématique ψ^*

Programme de la quinzaine 8 : 23 janvier au 3 février

Intégrales généralisées

- définition d'une fonction continue par morceaux, structure d'ev ;
- définition de l'intégrale sur un segment d'une telle fonction (par Chasles) ;
- intégrale sur un intervalle non segment : définition de la convergence ;
- propriétés classiques des intégrales convergentes (linéarité, Chasles, positivité, ...) ;
- absolue convergence, définition d'une fonction intégrable ;
- fonctions intégrables de référence : puissances en 0 ou $+\infty$, exponentielles en $\pm\infty$, ln en 0 ;
- règles de domination, d'équivalent, de Riemann ;
- définition d'une intégrale semi-convergente, exemple typique $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$;
- intégration par parties, utilisation d'une constante de primitivation pour assurer la convergence du crochet ;
- changement de variable, conservation de la nature de l'intégrale ;
- développement en série : interversion par convergence L^1 (ie $\sum \int_I |f_n|$ converge), à défaut pour les séries géométriques méthode "à la main" ;
- intégrale d'une limite simple : théorème de convergence dominée.

Intégrales à paramètre

$F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ avec I intervalle quelconque de \mathbb{R} .

- calcul du domaine de définition, noté J ;
- continuité : si $f(., t)$ est continue sur J et f est localement dominée par une fonction intégrable sur I , alors F est continue ;
- derivabilité : si $D_1 f(., t)$ est définie et continue sur J et $D_1 f$ est localement dominée par une fonction intégrable sur I , alors F est C^1 et $F'(x) = \int_I D_1 f(x, t) dt$;
- généralisation pour obtenir la classe de F ;
- limite aux bornes de J , par utilisation du critère séquentiel et du théorème de convergence dominée.

La fonction Γ n'est pas au programme.

Preuves exigibles :

- semi-convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$;
- théorème de continuité des intégrales à paramètre ;
- calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$ par utilisation d'une suite de fonctions.