Colles de mathématique ψ^*
Programme de la quinzaine 5 : 28 novembre au 9 décembre

Eléments propres

- valeurs propres, spectre d'un endomorphisme, méthodes de calcul ;
- vecteurs propres, sev propres d'un endomorphisme ;
- propriétés des éléments propres : les sev propres sont en somme directe, etc ;
- éléments propres d'une matrice carrée : ce sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé
- calcul a priori de la dimension des sev propres par la formule du rang ;
- si A est réelle et U est un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{U}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$;
- définition et premiers coefficients du polynôme caractéristique :
$$\chi_A = \det(XI - A) = X^n - \text{tr}(A).X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$$
- si χ_A est scindé alors $\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \text{mult}(\lambda).\lambda$ et $\det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^{\text{mult}(\lambda)}$;
- si v est induit par u, alors $\chi_v \mid \chi_u$ et $\text{Sp}(v) \subset \text{Sp}(u)$;
- Cayley-Hamilton (*admis*).

Réduction des endomorphismes ou matrices carrées

On se place dans un ev de dimension finie n .

- définition de la diagonalisabilité, caractérisation des bases diagonalisantes ;
- CS de diagonalisabilité : u a n valeurs propres ;
- CNS1 de diagonalisabilité : $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda = n$;
- CNS2 de diagonalisabilité : χ_u est scindé, et pour chaque racine multiple éventuelle $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$;
- CNS3 de diagonalisabilité : existence d'un polynôme annulateur scindé simple (*admis*) ;
- si v est induit par u diagonalisable, alors v est diagonalisable ;
- définition de la trigonalisabilité, CNS : le polynôme caractéristique est scindé (*admis*) ;
- pratique de la diagonalisation des matrices carrées ;
- pratique de la trigonalisation uniquement dans le cas où on peut trouver $n-1$ vecteurs propres indépendants.

Preuves exigibles :

- toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre ;
- CNS1 et 2 de diagonalisabilité ;
- $\det(XI - A) = X^n - \text{tr}(A).X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$;
- si v est induit par u, alors $\chi_v \mid \chi_u$ et $\text{Sp}(v) \subset \text{Sp}(u)$.