QUELQUES NOTIONS D'ANALYSE VECTORIELLE

L'analyse vectorielle permet d'exprimer les lois fondamentales de la physique des champs sous forme de relations **locales**, c'est à dire valable **en un point quelconque** du domaine d'étude.

Les définitions et relations ci-dessous seront utilisées notamment dans les cours d'électromagnétisme, de physique des ondes et de mécanique des fluides.

Les opérateurs vectoriels que nous rencontrerons transforment un champ (vectoriel ou scalaire) en un autre champ (vectoriel ou scalaire).

1. Les principaux opérateurs et leurs propriétés

1.1. Gradient

- On peut définir intrinsèquement le gradient par la relation :

$$dU = U(M+\overrightarrow{dl},t) - U(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U(M,t).\overrightarrow{\mathrm{dl}}$$

- Son interprétation physique est liée à la variation spatiale de la grandeur U à un instant fixé (gradient de pression dans un fluide, gradient de concentration dans un électrolyte, gradient de température, etc.).

- Le gradient est orthogonal aux surfaces « équiU ».

1.2. Divergence

- La divergence d'un champ vectoriel est définie intrinsèquement par la relation :

$$d\Phi = \mathrm{div}(\vec{A}).d\tau,$$

  où $d\Phi$ est le flux du vecteur $\vec{A}$ sortant de la surface élémentaire fermée délimitant le volume $d\tau$.

- L'opérateur divergence est lié au flux d'un vecteur : il intervient très souvent en physique dans les équations de conservation :
  - conservation de la charge,
  - conservation de l'énergie en électromagnétisme ou en thermique,
  - conservation de la masse en mécanique des fluides,
  - conservation du nombre de particules, etc.

1.3. Rotationnel

- Le rotationnel d'un champ vectoriel est défini intrinsèquement par la relation :

$$dC = \overrightarrow{rot}(\vec{A}).\overrightarrow{ds},$$

  où dC est la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long du contour fermé sur lequel s'appuie la surface dS.

- $\mathrm{div}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = 0$.
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U) = \vec{0}$).

- La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à flux conservatif est qu'il soit un champ de rotationnel : $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ équivaut à $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$, où $\vec{A}$ est connu à un gradient près.
- Si le rotationnel d'un champ $\vec{A}$ est nul, il existe un champ scalaire U - défini à une constante près (puisque $\overrightarrow{grad}(cte) = \vec{0}$) - tel que $\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$.
  Nous verrons que cela correspond à écrire que la circulation de ce champ est conservative, c'est le cas pour un champ électrostatique.

1.4. Relations utiles

U(M, t) et V(M, t) sont des champs scalaires, $\vec{A}$(M, t) et $\vec{B}$(M, t) des champs vectoriels.

- $\overrightarrow{\text{grad}}$ (UV) = U. $\overrightarrow{\text{grad}}$ V + V. $\overrightarrow{\text{grad}}$ U
- $\overrightarrow{rot}$ (U$\vec{A}$) = U $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})$ - $\vec{A}\wedge\overrightarrow{\text{grad}}$ (U)
- div(U$\vec{A}$) = Udiv($\vec{A}$) + $\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}$ (U)
- div($\vec{A}\wedge\vec{B}$) = $\vec{B}.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})$ - $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})$.($\vec{A}$)
- ΔU = div($\overrightarrow{\text{grad}}$ (U)) : ceci constitue la définition intrinsèque du laplacien scalaire
- $\overrightarrow{rot}$($\overrightarrow{rot}$)($\overrightarrow{A}$), = $\overrightarrow{\text{grad}}$ (div$\vec{A}$) - $\Delta\vec{A}$: ceci constitue la définition intrinsèque du laplacien vectoriel.

2. Coordonnées cartésiennes

Soit un point M repéré par ses coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z$,

2.1. Gradient

$\overrightarrow{\text{grad}}$ (U)= $\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$.

2.2. Divergence

div$\vec{A}$(M, t) = $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

2.3. Rotationnel

$\overrightarrow{rot}(\vec{A}$(M, t)) = $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$.

2.4. Laplacien d'un champ scalaire

ΔU = $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

2.5. Laplacien d'un champ vectoriel

$\Delta\vec{A}$ (M, t) = $\Delta A_x\vec{e}_x + \Delta A_y\vec{e}_y + \Delta A_z\vec{e}_z$

3. Coordonnées cylindriques

Soit un point M repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e}_r + z\overrightarrow{e}_z$.

3.1. Gradient

$\overrightarrow{\text{grad}}$ (U)= $\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$.

3.2. Divergence

$\mathrm{div}\vec{A}(\mathrm{M},t) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.

3.3. Rotationnel

$\overrightarrow{rot}(\vec{A}(\mathrm{M},t)) = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$.

3.4. Laplacien d'un champ scalaire

$\Delta U = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

3.5. Quelques relations utiles

- $\mathrm{div}(\vec{e}_r) = \dfrac{1}{r}$.
- $\mathrm{div}(r\vec{e}_r) = 2$.
- $\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r}\right) = 0$.
- $\mathrm{div}(f(r)\vec{e}_\theta) = 0$, où f(r) est une fonction quelconque de r.
- $\overrightarrow{rot}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$.

4. Coordonnées sphériques

Soit un point M repéré par ses coordonnées sphériques : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

4.1. Gradient

$\overrightarrow{grad}\,(U) = \dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$.

4.2. Divergence

$\mathrm{div}\vec{A}(\mathrm{M},t) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$.

4.3. Rotationnel

$\overrightarrow{rot}(\vec{A}(\mathrm{M},t)) = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$.

4.4. Laplacien d'un champ scalaire

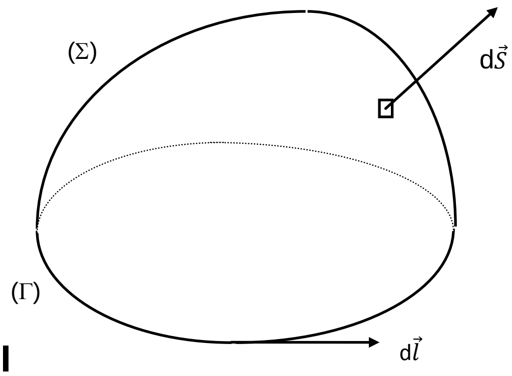
$\Delta U = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$.

4.5. *Quelques relations utiles*

- $\mathrm{div}(\vec{e}_r) = \dfrac{2}{r}$.
- $\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = 0$.
- $\Delta U(r) = \dfrac{2}{r}\dfrac{dU}{dr} + \dfrac{d^2U}{dr^2}$.

5. Théorème de STOKES

La circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface s'appuyant sur ce contour.

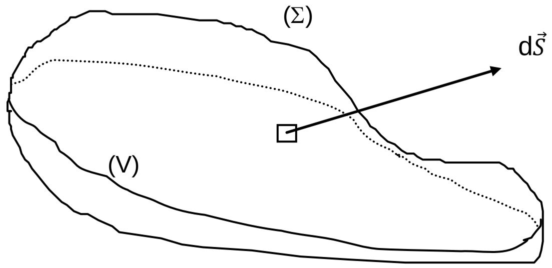


$$\oint_\Gamma \vec{A}.d\vec{l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}.d\vec{S}$$

R : L'orientation de la surface Σ se fait à partir de l'orientation de Γ.
(règle du tire-bouchon)

6. Théorème de GREEN-OSTROGRADSKI

Le flux sortant d'un champ vectoriel à travers une surface fermée est égal à l'intégrale sur le volume limité par cette surface de la divergence de ce champ.



$$\oiint_\Sigma .\vec{A}\,d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,d\tau$$

R : La normale orientée à une surface fermée est toujours sortante.

Nous voyons que les champs dont la divergence est nulle sont à flux conservatif et ceux dont le rotationnel est nul sont à circulation conservative.

7. Variations élémentaires d'un champ scalaire

La variation élémentaire totale d'un champ scalaire U(M, t) doit prendre en compte à la fois ses variations spatiale et temporelle ; elle est notée DU :

$DU = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(M,t).\vec{dl} + \dfrac{\partial U}{\partial t}dt$; Dans cette relation :

- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(M,t).\vec{dl}$ représente la variation *locale* de la grandeur U (que l'on note généralement dU) : dU = U(M+$\vec{dl}$, t) - U(M,t),
- $\dfrac{\partial U}{\partial t}dt$ représente la variation *temporelle* de U : U(M, t + dt) - U(M, t).

DU correspond à la variation du champ U qui serait ressentie par une particule subissant ce champ et se déplaçant d'une quantité vectorielle $\vec{dl}$ pendant un intervalle de temps dt.