Potentiels Newtoniens

Forces centrales conservatives

- La force est centrale si elle est dirigée vers un point fixe O.
- Elle est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle E_P par : $\vec{f} = -\overrightarrow{grad}E_P$

Sa forme générale est alors : $\vec{f} = -\dfrac{dE_P}{dr}\vec{u}_r$

Exemples de potentiels Newtoniens

On leur donnera la forme générale : $E_P = \dfrac{K}{r}$ $\quad \vec{f} = \dfrac{K}{r^2}\vec{u}_r$

Interaction gravitationnelle **:** $E_P = -G\dfrac{m_1m_2}{r}$ $\quad \vec{f} = -G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_r$ $\quad K = -Gm_1m_2 < 0$

Interaction coulombienne **:** $E_P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r}$ $\quad \vec{f} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r$ $\quad K = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0} > 0$

N.B : interaction attractive (gravitationnelle) K<0 répulsive (coulombienne) K>0

Constantes du mouvement

- Le moment cinétique $\boxed{\vec{\sigma}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_Z}$ par rapport au point O est constant.
- Constante des aires : $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. V=C/2 est la vitesse aérolaire.
- Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = \dfrac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \dfrac{mC^2}{2r^2} + E_P(r) = cste$

Etats libres (r non borné) ou états liés (r borné compris entre r_m et r_M)

Interaction répulsive K>0 $\dot{r}$ ne peut s'annuler que pour r infini : **états libres seulement**

Interaction attractive K<0 si $E_m < 0$, $\dot{r}$ peut s'annuler pour des valeurs finies de r correspondant à r_m et r_M : **états liées possibles.**

Equation du mouvement

On établit l'équation en u=1/r $\quad \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{K}{mC^2}$

Nature de la trajectoire

$\boxed{r = \dfrac{p}{-\varepsilon + e\cos(\theta - \theta_o)}}$ **où ε = +1 pour K >O et ε=- 1 pour K<O**

conique de paramètres d'excentricité e

e<1 => ellipse (états liés) e=1=> parabole e>1 => hyperbole

<u>La forme de la trajectoire dépend de la nature de l'interaction et des conditions initiales</u>

Expression de l'énergie

$\boxed{E_m = \dfrac{K^2}{2mC^2}(e^2 - 1)}$ **Elle détermine la nature de la trajectoire.**

$E_m > 0$ hyperbole ; $E_m = 0$ parabole ; $E_m < 0$ ellipse .

Mouvements des planètes (champ newtonien attractif (K<0) et énergie négative

- **L'énergie mécanique** $E_m = -\frac{|K|}{2a} = \frac{K}{2a} = -\frac{GM_T}{2a} < 0$
- **Période de révolution** $T = \frac{\pi ab}{C/2}$ **soit** $T = \frac{2\pi a^{3/2}\sqrt{\mu}}{(GM_T M_S)^{1/2}}$ **où** $\mu = \frac{M_S M_P}{M_S + M_P}$ est la masse des réduites des masses en interaction.
- **Cas particulier où la période de révolution correspond à un satellite de masse M_S faible devant celle du soleil M_S.** $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$ **(3ème de Kepler).**

- **Vitesse à l'apogée et au périgée** $v(r_A)r_A = v(r_P)r_P$

Trajectoire circulaire

Apprendre à refaire les calculs grâce au PFD.

Rappels mathématiques : caractéristiques géométriques des trajectoires elliptiques

Ellipse de centre O, de foyer S, d'apogée A, de périgée P et d'équation $\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}}$ **e<1**

Périgée $SP = \frac{p}{1+e}$ Apogée $SA = \frac{p}{1-e}$

Demi grand axe a : $2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}$ d'où $a = \frac{p}{1-e^2}$

Distance focale : $c = OS = a - SP = \frac{pe}{1-e^2}$ Excentricité : $e = \frac{c}{a}$

Demi petit axe : $a^2 = b^2 + c^2$ soit $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2}$