ECLUSE DE CANAL - CORRIGE

Question 1

Mobilité utile : 1 (toutes les pièces prennent une position dépendante de λ).
Mobilité interne : 1 (rotation de la tige du vérin autour de son axe).
h=Is-6(n-1)+m=(3+2+5+5+4+3)-6(5-1)+2=0 La chaîne est isostatique.

En supprimant le joint de cardan on enlève 5 inconnues statiques et 1 solide. La chaîne devient hyperstatique d'ordre 1. Il faut donc introduire une liberté dans une liaison sans changer la mobilité. La rotation d'axe horizontal du support de vérin permettait de compenser le défaut d'alignement vertical du point A du vantail avec l'axe de la tige, on peut donc introduire une translation d'axe $\vec{z}$ dans la liaison « v-t » en la transformant en sphère cylindre.

Question 2

On écrit la fermeture géométrique : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$ puis on projette dans la base b. On trouve :
$\lambda^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-\lambda^2}{2ab}; \qquad -\dot{\alpha}\sin\alpha = \frac{-2\lambda\dot{\lambda}}{2ab}; \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-\lambda^2)^2}{4a^2b^2}}$$

$$\boxed{\dot{\alpha} = \frac{2\lambda\dot{\lambda}}{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-\lambda^2)^2}}}$$

Question 3

$$\vec{V}_{P,v/b} = \vec{V}_{O,v/b} + \overrightarrow{PO}\wedge\vec{\Omega}_{v/b} = \vec{0} - x\vec{x}_v \wedge \dot{\alpha}\vec{z} = x\dot{\alpha}\vec{y}_v; \qquad \boxed{\vec{V}_{P,v/b} = x\dot{\alpha}\vec{y}_v}$$

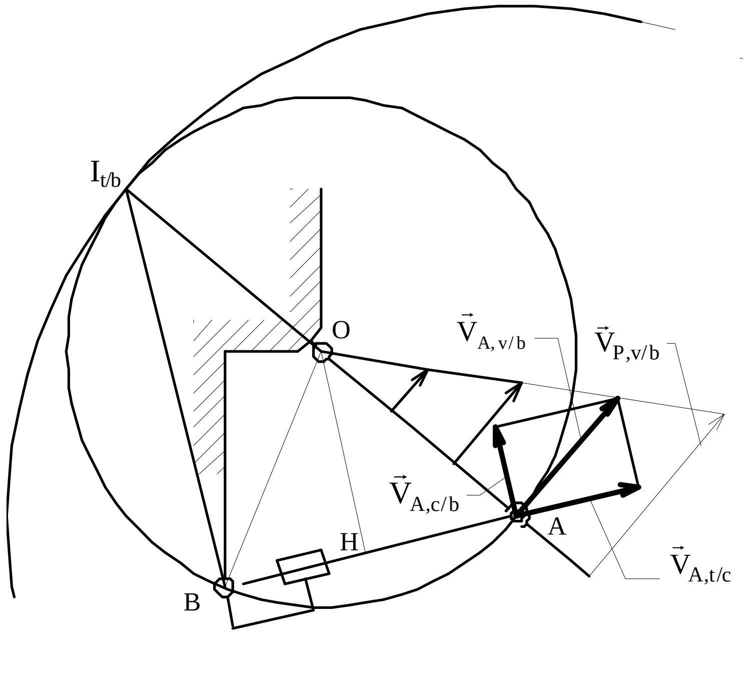
Question 4

Représentation graphique.

Le vecteur $\vec{V}_{A,v/b}$ est de direction $\vec{y}_v$.

$\vec{V}_{A,v/b} = \vec{V}_{A,v/t} + \vec{V}_{A,t/c} + \vec{V}_{A,c/b} = \vec{0} + \vec{V}_{A,t/c} + \vec{V}_{A,c/b}$ avec $\vec{V}_{A,t/c} = \dot{\lambda}\vec{y}_t$ (vecteur entièrement défini).

Le vecteur $\vec{V}_{A,c/b}$ est orthogonal à BA (B est CIR du mouvement du corps de vérin par rapport au bajoyer). D'où la construction de $\vec{V}_{A,v/b}$ puis la représentation du champ des vitesses.



Question 5

$$J = \iiint (x^2 + y^2)\,dm = \mu e h \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{\mu e h \ell^3}{3} = \frac{M\ell^2}{3}$$

Question 6

On isole le corps et la tige du vérin. Les liaisons sont parfaites.

En appliquant le théorème du moment dynamique en B en projection sur $\vec{z}$:

$\vec{\delta}_{B,(c+t)/b}.\vec{z} = (\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{v\to t}).\vec{z}$ avec $\vec{\delta}_{B,(c+t)/b} = \vec{0}$ car les inerties sont négligées.

$(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{v\to t}).\vec{z} = \left(\lambda \vec{y}_t \wedge (X\vec{x}_t + Y\vec{y}_t)\right).\vec{z} = -\lambda X = 0$ donc $X = 0$, d'où $\vec{R}_{v\to t} = F\vec{y}_t$

Question 7

Méthode 1

On isole le vantail et on applique le théorème du moment dynamique en O projeté suivant $\vec{z}$.

BAME :

- Effort de la tige du vérin sur le vantail : $\vec{R}_{v\to t} = F\vec{y}_t$
- Liaison pivot entre le bâti et le vantail
- Effort de l'eau sur le vantail : $d\vec{F}_{eau\to v} = -p_r ds\,\vec{y}_v$ en P

$$\sum \vec{M}^{O}_{\bar{v}\to v}.\vec{z} = \vec{\delta}^{O}_{v/0}.\vec{z}$$

$$\vec{M}^{O}_{\bar{v}\to v} = \overrightarrow{OA} \wedge F\,\vec{y}_t + \int \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}_{eau\to v} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}^{O}_{v/0} = J.\ddot{\alpha}.\vec{z}$$

Après calcul, on trouve : $\boxed{F = \dfrac{M\dfrac{\ell^2}{3}\ddot{\alpha} + \dfrac{k\rho\dot{\alpha}^2 h\ell^4}{8}}{a\cos(\alpha-\beta)}}$

Méthode 2

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué au vantail : $\dfrac{d}{dt}E_{v/b} = P_{\bar{v}\to v/b}$

Énergie cinétique du vantail $E_{v/b} = \dfrac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$ (solide en rotation autour d'un axe fixe).

Puissance des actions extérieures :

Actions du vérin : $P = F\vec{y}_t.a\dot{\alpha}\vec{y}_v = Fa\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta)$

Action du bajoyer : $P = 0$ (liaison parfaite)

Action de l'eau : $P = \int_0^{\ell} \vec{V}_{P,v/b}.d\vec{F}_{eau\to v} = -\int_0^{\ell} x\dot{\alpha}\vec{y}_v.k\rho x^2\dot{\alpha}^2 \frac{h}{2} dx\,\vec{y}_v = -\dfrac{k\rho\dot{\alpha}^3 h\ell^4}{8}$

La puissance développée par les forces dues à la pression hydrostatique est nulle car les niveaux sont identiques de part et d'autre du vantail.

Action de la pesanteur : $P = 0$ (poids orthogonal à la vitesse de G)

d'où $J\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = Fa\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) - \dfrac{k\rho\dot{\alpha}^3 h\ell^4}{8}$; $F = \dfrac{J\ddot{\alpha} + \dfrac{k\rho\dot{\alpha}^2 h\ell^4}{8}}{a\cos(\alpha-\beta)}$; $\boxed{F = \dfrac{M\dfrac{\ell^2}{3}\ddot{\alpha} + \dfrac{k\rho\dot{\alpha}^2 h\ell^4}{8}}{a\cos(\alpha-\beta)}}$