CINETIQUE

1) Conservation de la masse

2) Le torseur cinétique

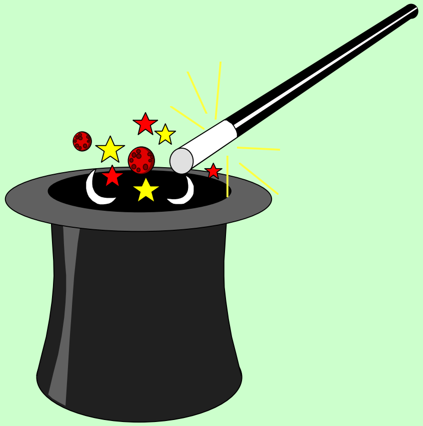
3) Le torseur dynamique

4) Relation entre les deux torseurs

1) Principe de conservation de la masse

Un système matériel E est à masse conservatrice si sa masse est indépendante :

- ***du repère depuis lequel on observe le mouvement de E.***
- ***du temps auquel on observe le mouvement de E.***



$$\frac{dm}{dt} = 0$$

On démontre alors en mathématiques que si f est une fonction vectorielle qui associe le vecteur $\overrightarrow{f(M,t)}$ à tout point M de E (et ceci à tout instant), on a :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_E \overrightarrow{f(M,t)} \times dm\right)_{/R} = \int_E \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{f(M,t)}\right)_{/R} \times dm}$$

☞ ***On admettra que cette relation s'applique pour tous les systèmes matériels étudiés en mécanique (solide, ensemble de solides, quantité de liquide ou de gaz).***

2) Le torseur cinétique

a) Définition : ***le torseur cinétique, ou torseur des quantités de mouvement, du solide S dans son mouvement par rapport à un repère R est défini par :***

- ***une résultante cinétique (quantité de mouvement) de S/R***
- ***un moment cinétique en un point (A par exemple) de S/R***

$\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}}$

$$\left\{\mathscr{C}(S/R)\right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\,.dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\,.dm \end{array} \right\}_A$$

b) Autre expression de la résultante cinétique :

But cherché: trouver un calcul simple de la résultante.

Soit G le centre de gravité du solide S, on a :

$$m \times \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM} \times dm \qquad \textbf{(définition du CdG)}$$

d'où en dérivant :

$$\frac{d}{dt}\left(m \times \overrightarrow{OG}\right)_{/R} = \frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{OM} \times dm\right)_{/R}$$

constante

utilisation du principe de conservation de la masse

$$m \times \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{/R} = \int_S \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R} \times dm$$

$$m \times \overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$

Résultante cinétique

d'où au final :

$$\left\{ m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \;\; ; \;\; \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} \right\}_A$$

Vitesse du Cdg et non de A !!!

c) Changement de point :

Supposons le torseur cinétique précédent défini au point A et cherchons à l'écrire en B.

$$\overrightarrow{\sigma_B(S/R)} = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{V_{M \in S/R}} \times dm$$

$$= \int_S \overbrace{(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM})} \wedge \overrightarrow{V_{M \in S/R}} \times dm$$

$$= \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\int_S \overrightarrow{V_{M \in S/R}} \times dm}_{m\,\overrightarrow{V_{G \in S/R}}} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M \in S/R}} \times dm}_{\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R}}}$$

$$\boxed{m\ \overrightarrow{V_{G \in S/R}}} \qquad \boxed{\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R}}}$$

d'où finalement :

Résultante cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_B(S/R)} = \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\overrightarrow{V_G(S/R)}$$

Formule de changement de point classique donc on peut effectivement parler de torseur cinétique

d) Cas du solide :

But cherché: trouver un calcul simple du moment cinétique.

Repartons de la définition du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \boxed{\overrightarrow{V_{M\in S/R}}} \times dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overbrace{(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}})}. \, dm$$

soit en développant :

$$\boxed{m \, \overrightarrow{AG}}$$

$$= \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}. \, dm}_{\boxed{\int_S \overrightarrow{AM} \, dm} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm}_{I(A,S)\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

d'où finalement :

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

☹

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Premier cas particulier :

☞ ***Le point A est confondu avec le centre de gravité G.***

$$\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}) + m.\overset{\boxed{\vec{0}}}{\cancel{\overrightarrow{GG}}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S)\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

☺

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Deuxième cas particulier :

☞ ***Le point A est fixe dans R.***

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overset{\vec{0}}{\cancel{\overrightarrow{V_{A\in S/R}}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S)\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

☺

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Troisième cas particulier :

La masse du solide est concentrée en son centre de gravité G (point matériel).

$$\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}) + m.\overbrace{\cancel{\overrightarrow{GG}}}^{\boxed{\vec{0}}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_G$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = \vec{0}}$$ ☺

Synthèse

Faire systématiquement les calculs en G
(ou en un point fixe A s'il existe
pour le mouvement étudié)

$$\overrightarrow{\sigma_{G\,ou\,A}(S/R)} = I(G\,ou\,A, S)\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

3) Le torseur dynamique

a) Définition : ***le torseur dynamique, ou torseur des quantités d'accélération, du solide S dans son mouvement par rapport à un repère R est défini par :***

Une résultante dynamique (ou quantité d'accélération) de S/R .

Un moment dynamique défini en un point (A par exemple) de S/R.

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)}$$

d'où

$$\left\{ \boldsymbol{D}(S/R) \right\}_A =$$

$$\left\{ \underbrace{\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm}_{\text{Résultante dynamique}} \; ; \; \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm}_{\text{Moment dynamique}} \right\}_{\boldsymbol{A}}$$

b) Autre expression de la résultante dynamique :

Soit G le centre de gravité du solide S.

On a obtenu précédemment (pour la résultante cinétique) :

$$\boxed{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm = m \times \overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$$

d'où en dérivant :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm \right)_{/R}}_{\text{Principe de conservation de la masse}} = \frac{d}{dt}(m \times \overrightarrow{V_{G\in S/R}})_{/R}$$

Principe de conservation de la masse

Constante

$$\frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm\right)_{/R} = \frac{d}{dt}\left(m\times\overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)_{/R}$$

$$\int_S \boxed{\frac{d\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)}{dt}_{/R}} \times dm = m \times \boxed{\left(\frac{d\left(\overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)}{dt}\right)_{/R}}$$

$$\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \times dm = m\ \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}}$$

d'où :

$$\left\{\boldsymbol{D}(S/R)\right\}_A = \left\{ m\ \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}}\ \ ;\ \overrightarrow{\delta_A(S/R)} \right\}_{\boldsymbol{A}}$$

Accélération du Cdg et non de A !!!

c) Changement de point :

On peut démontrer, comme pour le torseur cinétique :

Résultante dynamique

$$\overrightarrow{\delta_B(S/R)} = \overrightarrow{\delta_A(S/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge \boxed{m.\overrightarrow{\Gamma_G(S/R)}}$$

Formule de changement de point classique donc on peut effectivement parler de torseur dynamique.

4) Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

a) Résultante dynamique :

Il va de soi que la résultante dynamique est la simple dérivée de la résultante cinétique (par rapport au mouvement considéré) :

$$m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)_{/R}$$

toujours en G !!!

b) Moment dynamique :

Plutôt que de conduire le calcul direct du moment dynamique (nécessitant la connaissance du champ des accélérations) il est préférable de déduire le moment dynamique du moment cinétique qui est bien plus facile à calculer.

Il suffit alors d'utiliser la formule suivante :

Résultante cinétique

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \overrightarrow{V_{\boxed{A/R}}} \wedge \boxed{m\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$$

Le point A est quelconque

Relation entre moment dynamique et moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$ **dérivons**

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} = \frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm\right)_{/R}$$

$$= \int_S \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)_{/R} \times dm$$

Conservation de la masse

$$= \int_S \frac{d}{dt}\left(\boxed{\overrightarrow{AM}}\right)_{/R} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm + \int_S \boxed{\overrightarrow{AM}} \wedge \boxed{\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)_{/R}} \times dm$$

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM} \qquad \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM} \qquad \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} = \underbrace{\int_s \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\right)_{/R} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm}_{} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \times dm}_{}$$

$$\int_s \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)_{/R} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_A(S/R)}}$$

$$-\int_s \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OA}\right)_{/R} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm + \int_s \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\right)_{/R} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$

$$-\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm + \cancel{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm}$$

Résultante cinétique

$$\boxed{-\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$$

D'où la formule suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$$

☹ ☹ ☹

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$$

Premier cas particulier :

☞ ***Le point A est confondu avec le centre de gravité.***

$$\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}\right)_{/R} + \cancel{\overrightarrow{V_{G/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}^{\;\vec{0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}\right)_{/R}}$$ ☺

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

Deuxième cas particulier :

☞ ***Le point A est fixe dans R***

ou $\overrightarrow{V_{A/R}}$ ***est colinéaire à*** $\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \cancel{\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}^{\boxed{\vec{0}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R}}$$ ☺

Synthèse

Faire systématiquement les calculs en G (ou en un point fixe A s'il existe pour le mouvement étudié)

$$\overrightarrow{\delta_{G\,ou\,A}(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{G\,ou\,A}(S/R)}\right)_{/R}$$

Synthèse générale
(pour le calcul du torseur dynamique)

Résultante → $m \, . \, \overrightarrow{\Gamma_{G \in S / R}}$

☞ *calcul de* $\overrightarrow{V_{G \in S / R}}$

puis dérivation pour obtenir $\overrightarrow{\Gamma_{G \in S / R}}$

Moment

(en un point D quelconque)

$$\overrightarrow{\delta_D(S/R)}$$

1) Calculer d'abord le moment cinétique en G :

$$\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S)\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

2) Dériver le résultat :

$$\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}\right)_{/R}$$

3) Changer de point :

$$\overrightarrow{\delta_D(S/R)} = \overrightarrow{\delta_G(S/R)} + \overrightarrow{DG} \wedge m.\overrightarrow{\Gamma_G(S/R)}$$

THE END