INERTIE

CARACTERISTIQUES D'INERTIE DES SOLIDES

1) CENTRE D'INERTIE
2) MOMENT D'INERTIE
3) MATRICE D'INERTIE
4) SOLIDES ELEMENTAIRES

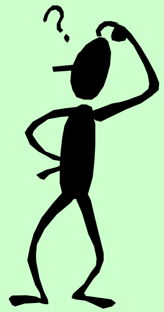
1) CENTRE D’INERTIE

a) Définition :

On appelle centre d’inertie (ou centre de gravité) d’un solide S le point G, unique et fixe dans S, défini par :

intégrale triple

$$\iiint_S \overrightarrow{GM} \times dm = \vec{0}$$



☞ ***M est un point « courant » qui décrit totalement le solide S.***

si solide homogène : ***centre de masse = centre de volume***

si g est constant : ***centre de masse = centre de gravité***

b) Propriétés :

- ***Symétrie matérielle :*** ***s'il existe, pour un solide S, un élément de symétrie (plan, axe), d'un point de vue répartition des masses, le centre d'inertie G appartient alors à cet élément de symétrie.***

Position : ***soit A un point quelconque, on a :***

$$\int_S \overrightarrow{GM} \times dm = \int_S \underbrace{\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}\right)}_{\overrightarrow{GM}} \times dm$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA} \times \int_S dm + \int_S \overrightarrow{AM} \times dm$$

$$\boxed{m \times \overrightarrow{AG} = \int_S \overrightarrow{AM} \times dm}$$

$$m\times \overrightarrow{AG} = \int_S \overrightarrow{AM} \times dm$$

Nota : ***si on appelle (x_G y_G z_G) les composantes de $\overrightarrow{AG}$ on a en projection sur les axes du repère :***

☞ $$m\times x_G = \iiint_S x\times dm$$

☞ $$m\times y_G = \iiint_S y\times dm$$

☞ $$m\times z_G = \iiint_S z\times dm$$

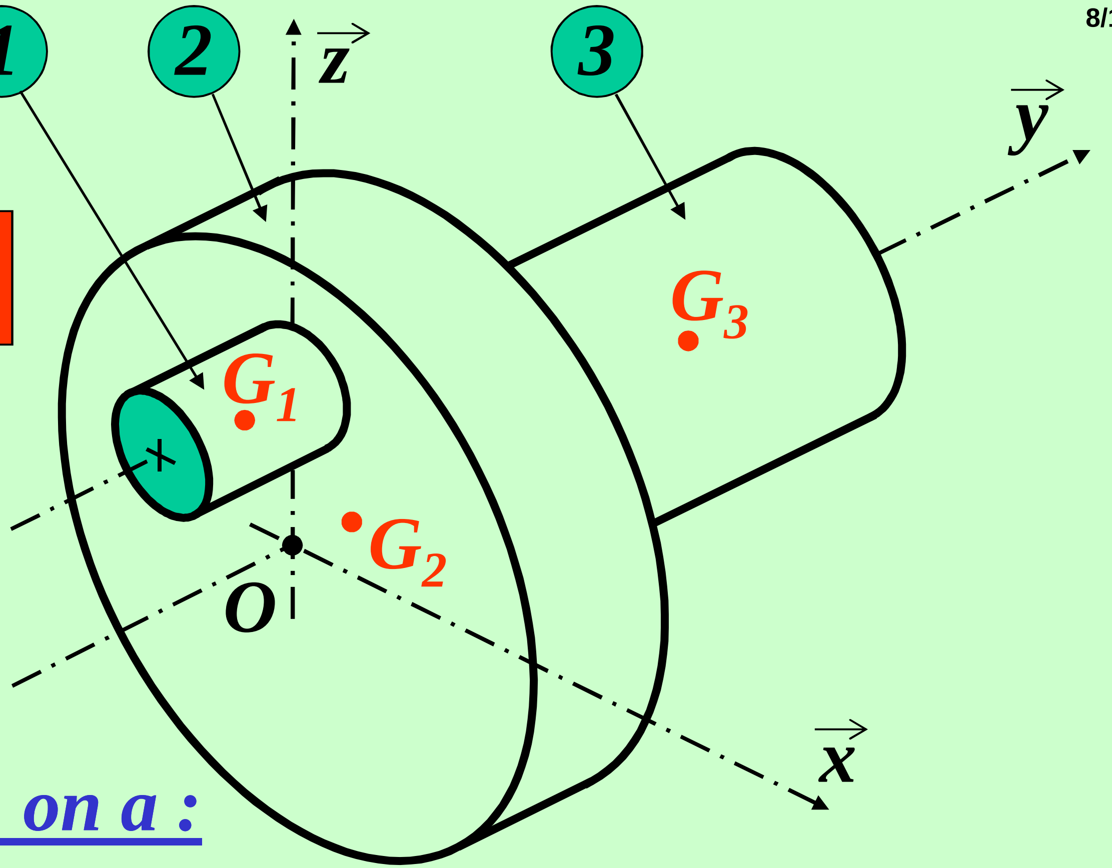
Associativité : ***pour un ensemble de n solides S_i de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i, on a :***

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_1^n \left(m_i . \overrightarrow{AG_i}\right)}{\sum_1^n m_i}$$

masse totale

c) Exemple :

Symétrie ⟶ $x_G = 0$



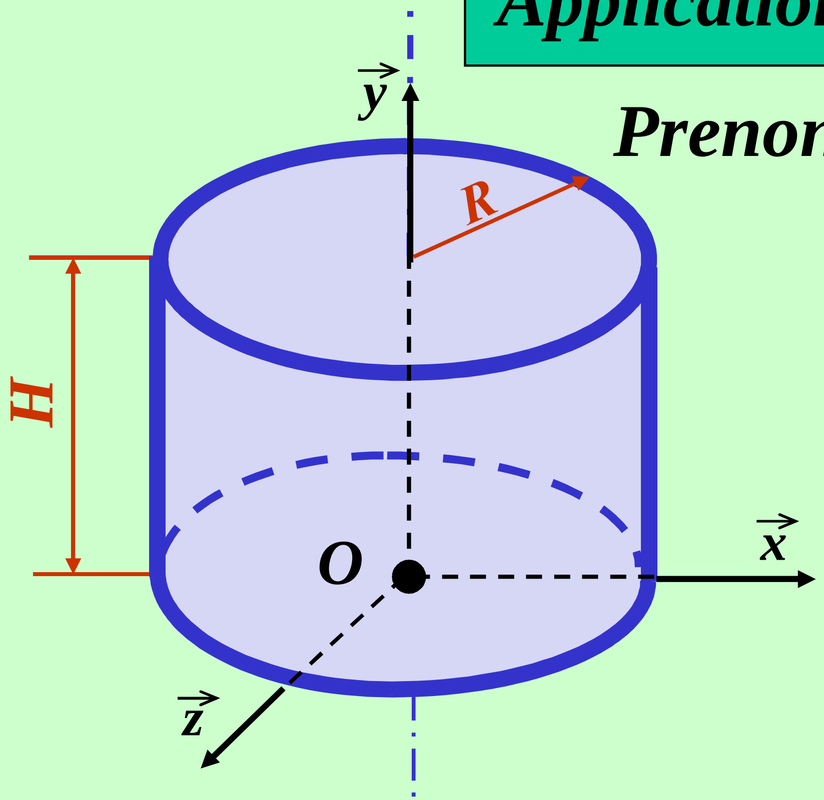
Par simple associativité, on a :

$$\left(m_1+m_2+m_3\right)\overrightarrow{OG} = m_1\,\overrightarrow{OG_1}+m_2\,\overrightarrow{OG_2}+m_3\,\overrightarrow{OG_3}$$

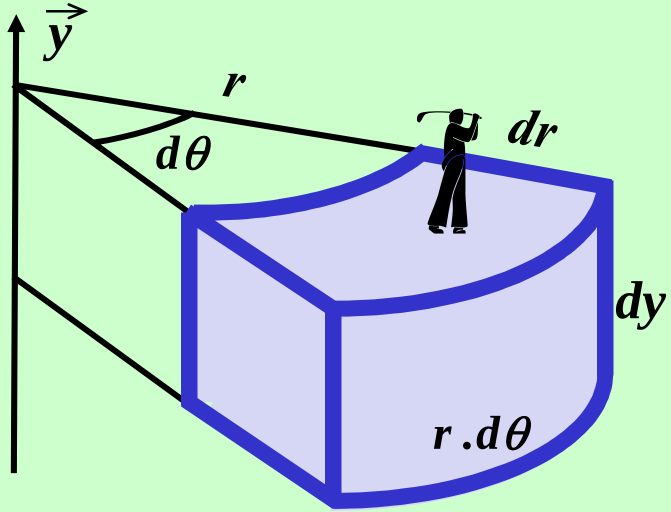
en projection sur $\vec{y}$ et $\vec{z}$

ou bien : $\left(m_1+m_2+m_3\right)\overrightarrow{G_1G} = m_2\,\overrightarrow{G_1G_2}+m_3\,\overrightarrow{G_1G_3}$

Application à un cylindre



Prenons l'élément de matière suivant :



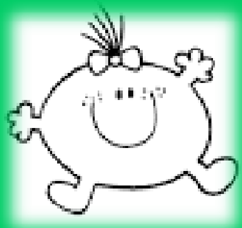
Préliminaire → **calcul du volume :**

$$\mathbf{dv} = dr\,.\,dy\,.\,r\,d\theta$$

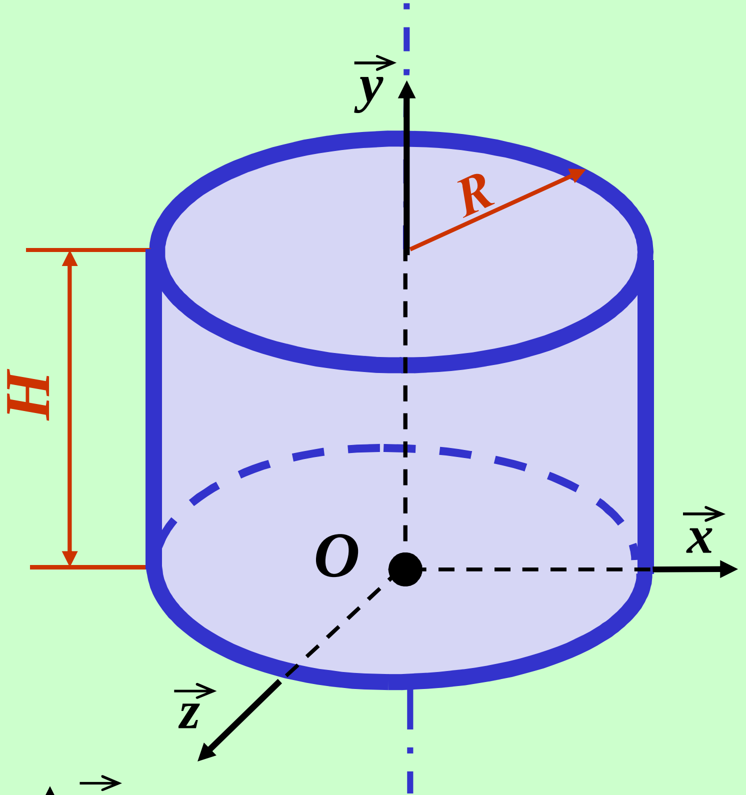
$$\mathbf{V} = \underbrace{\int_0^R r\,dr}_{\frac{R^2}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^H dy}_{H}$$

Finalement :

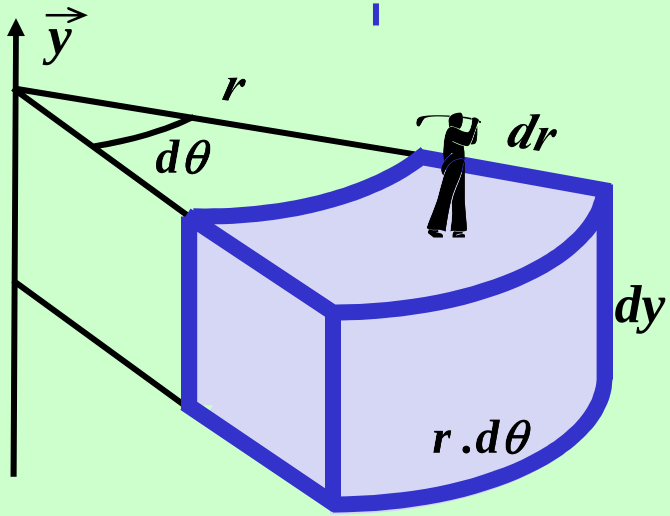
$$V = \pi R^2 H$$



Calcul de la position du centre de gravité :

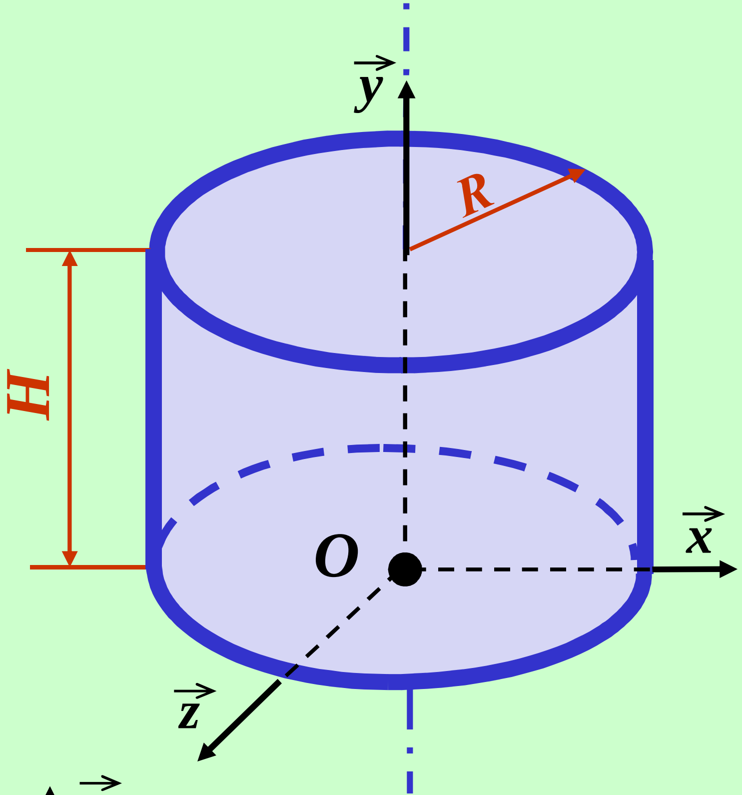


Par symétrie **G** est sur l'axe $O\vec{y}$



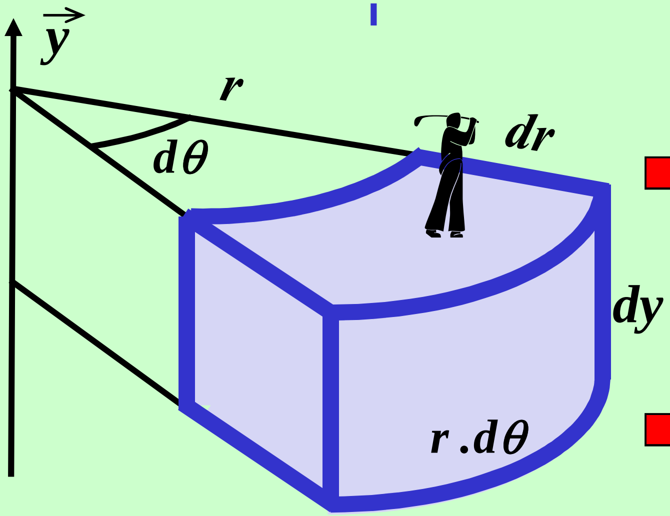
$$m \times \overrightarrow{OG} = \iiint_{solide} \overrightarrow{OM} \times dm$$

Calcul de y_G



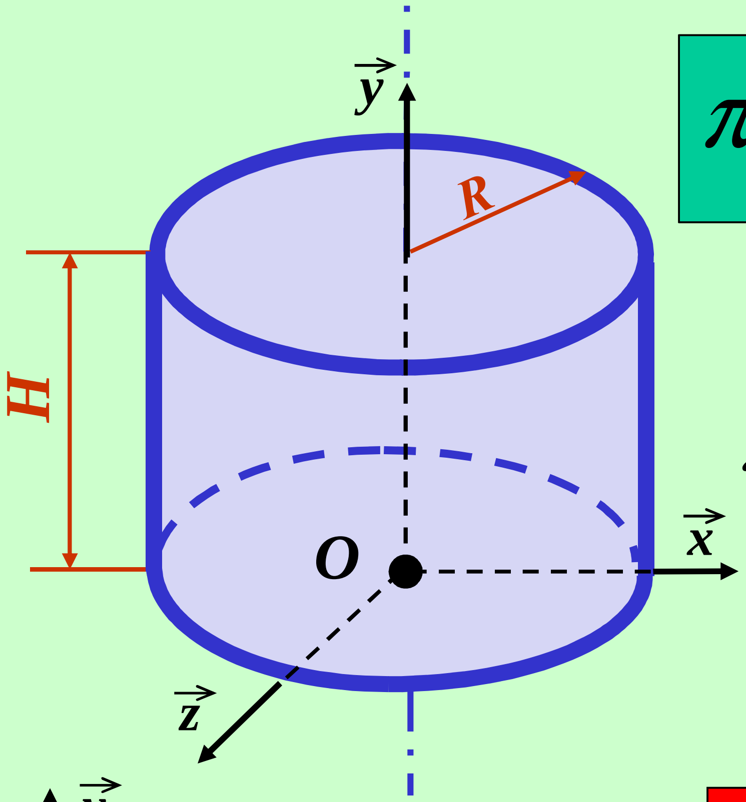
$$m\times\overrightarrow{OG}=\iiint_{solide}\overrightarrow{OM}\times dm$$

$$m\times y_G=\int_S y\times dm$$



$$\cancel{\rho}.V.y_G=\int_S y.\cancel{\rho}.dv$$

$$\pi R^2 H.y_G=\int_S y.r\,dr\,d\theta\,dy$$

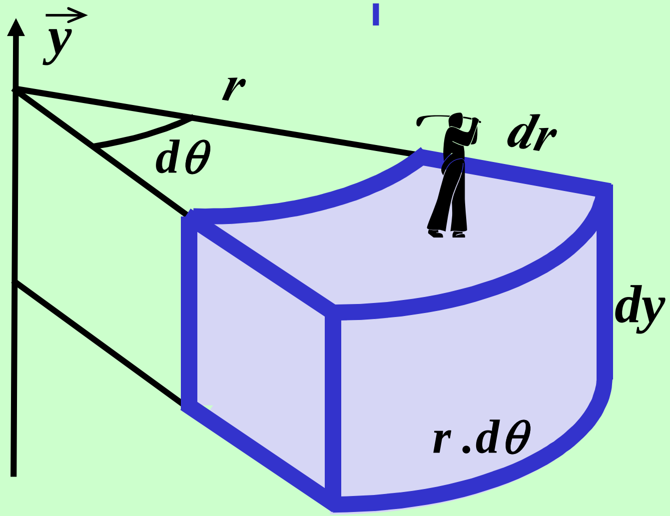


$$\pi R^2 H \times y_G = \int_S y \times r\, dr\, d\theta\, dy$$

d'où :

$$\pi R^2 H \times y_G = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H$$

$$\Rightarrow \cancel{\pi}\,\cancel{R^2}\,\cancel{H}\,.\,y_G = \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}}\,.\,\cancel{2}\,\cancel{\pi}\,.\,\frac{H^{\cancel{2}}}{2}$$



soit :

$$\boxed{y_G = \frac{H}{2}}$$

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

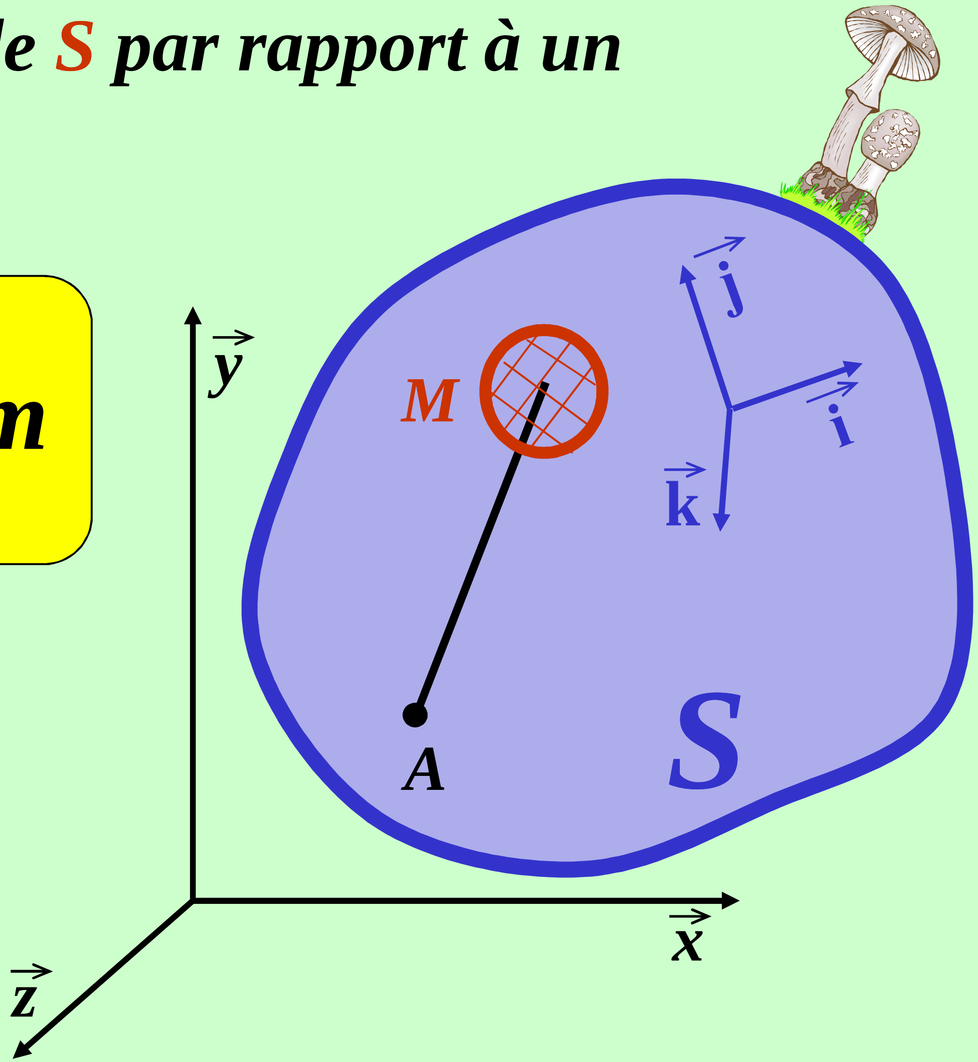
2) MOMENT D'INERTIE

a) Par rapport à un point A : ***on appelle moment d'inertie $I_A(S)$ d'un solide S par rapport à un point quelconque A :***

$$I_A(S) = \int_S \overrightarrow{AM}^{\,2}\, dm$$

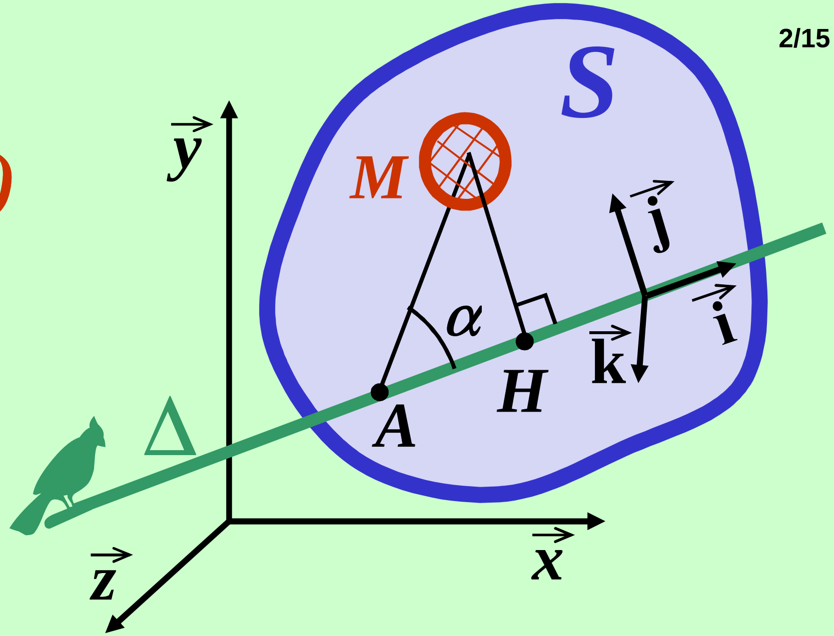
L'unité est le :

$kg.m^2$



b) Par rapport à une droite Δ :

On appelle moment d'inertie $I_\Delta(S)$ d'un solide S par rapport à une droite quelconque Δ :



Point quelconque de Δ

$$I_\Delta(S) = \int_S (\underbrace{\vec{i} \wedge \overrightarrow{AM}})^2 . \, dm$$

$$= \int_S \left(\overbrace{\underbrace{\|\vec{i}\|}_{1} . \underbrace{\boxed{\|\overrightarrow{AM}\| . \sin\alpha . \vec{k}}}_{HM}} \right)^2 . \, dm$$

d'où finalement :

Produit scalaire

$$\boxed{I_{\Delta}(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^{\,2}\, dm}$$

c) Exemple → rayon de giration :

Il s'agit de la distance R telle que l'on puisse écrire :

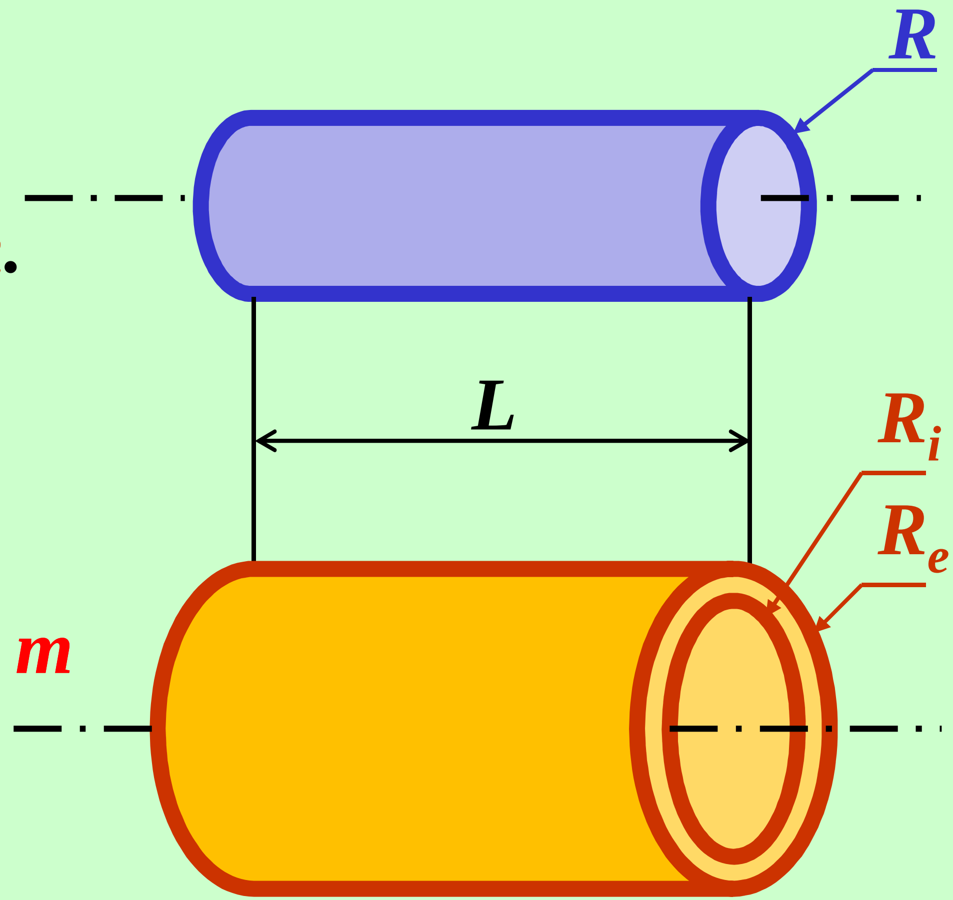
$$I_{\Delta}(S) = m\,.R^2$$

L'intérêt du rayon de giration est de donner une indication sur l'éloignement des masses par rapport à l'axe considéré.

En effet deux corps peuvent avoir la même masse mais des moments d'inertie, et donc des rayons de giration, très différents (par exemple un tube comparé à un cylindre plein de même masse mais de diamètre bien plus petit).

Justification de l'importance de la répartition des masses par rapport à l'axe de rotation

Soit un cylindre de rayon R, de longueur L et de masse m.



Soit un tube de <u>même masse</u> m et de <u>même longueur</u> L.

On notera R_i le rayon intérieur et R_e le rayon extérieur.

Préliminaire : relation entre les trois rayons

même masse

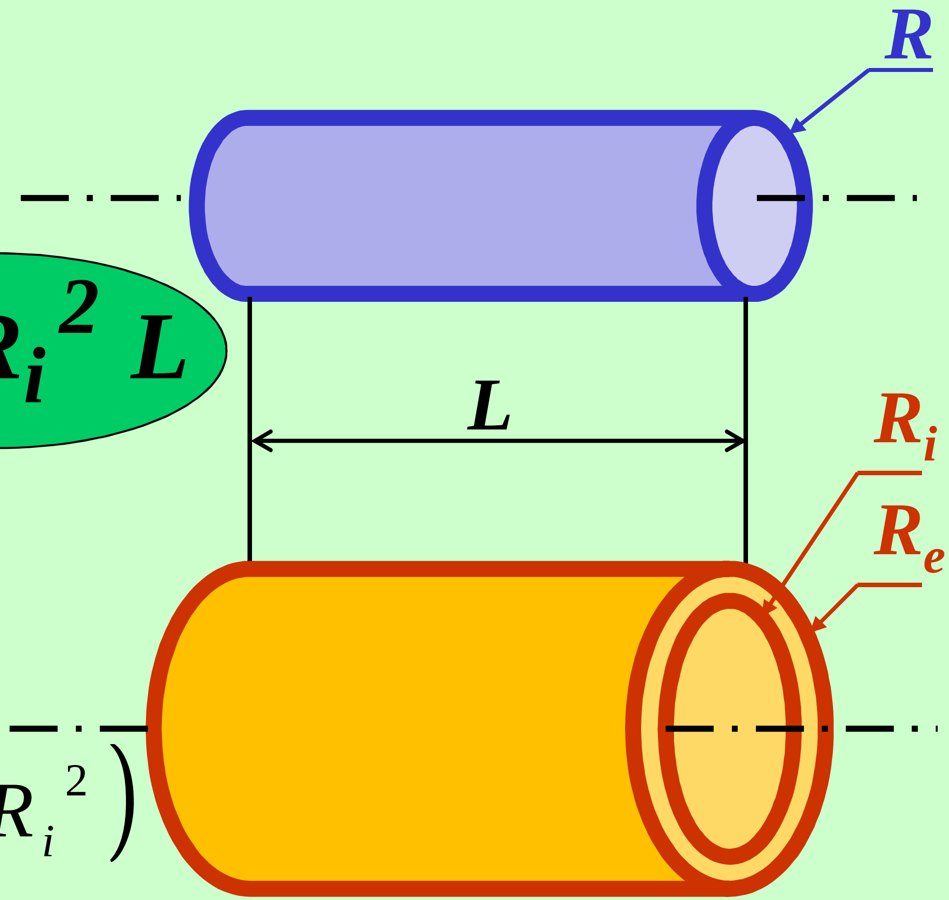
$m_e - m_i$

$m_{cyl} = m_{tube}$

$\rho \pi R_i^2 L$

$\rho \pi R^2 L$

$\rho \pi R_e^2 L$



d'où

$$\rho \pi R^2 L = \rho \pi L \left(R_e^2 - R_i^2 \right)$$

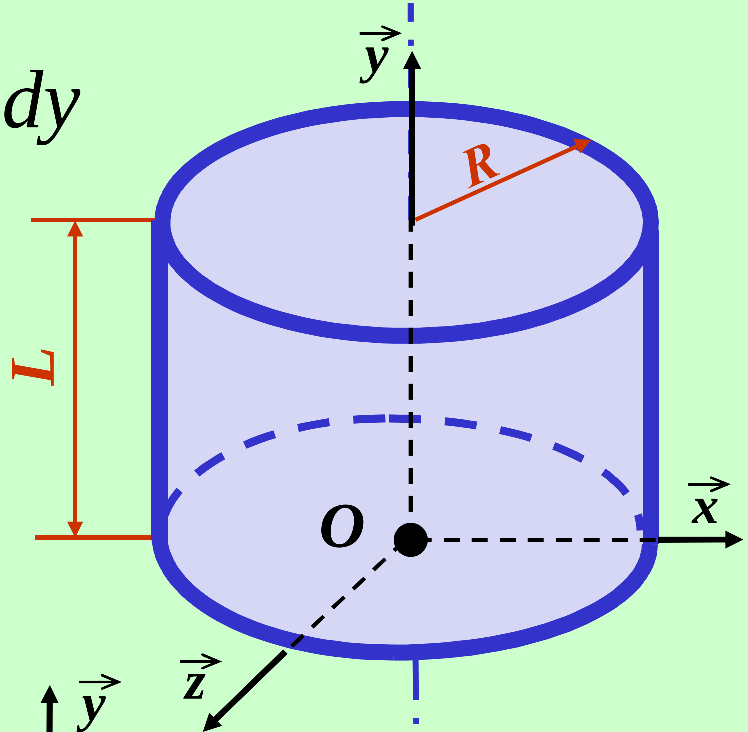
soit $\boxed{R^2 = R_e^2 - R_i^2}$

Moment d'inertie du cylindre autour de son axe

$$I_{cyl} = \int_S \overrightarrow{HM}^2 \, dm = \int_S r^2 \rho \, r \, dr \, d\theta \, dy$$

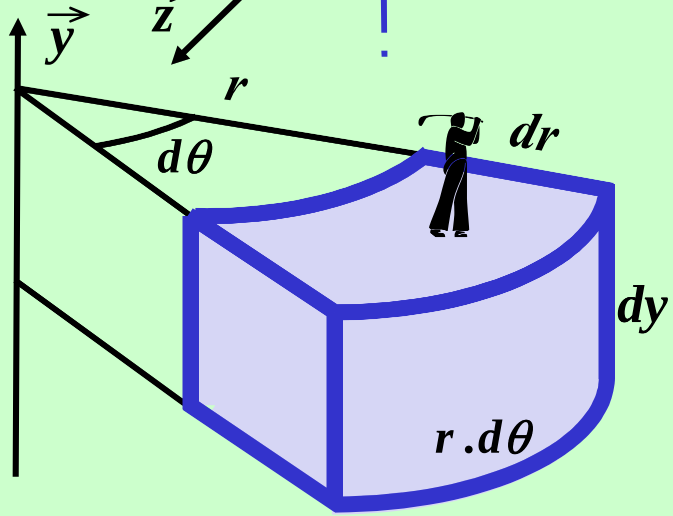
$$= \rho \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [y]_0^L$$

$$= \rho \pi L R^2 . \frac{2R^2}{4}$$



d'où finalement

$$\boxed{I_{cyl} = m . \frac{R^2}{2}}$$



Moment d'inertie du tube autour de son axe

par soustraction de deux cylindres

$$I_{tube} = m_e \cdot \frac{R_e^{\,2}}{2} - m_i \cdot \frac{R_i^{\,2}}{2}$$

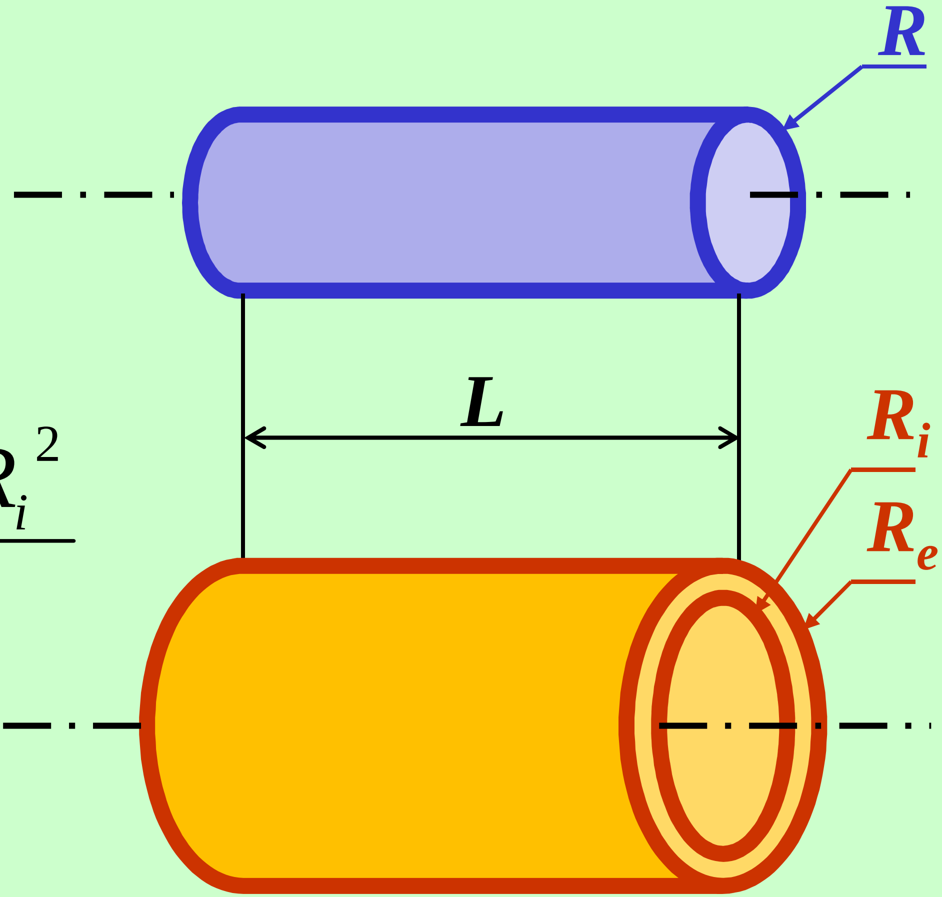
$$= \rho \pi \frac{L}{2} \left(R_e^{\,4} - R_i^{\,4} \right)$$

$$= \rho \pi \frac{L}{2} \underbrace{\left(R_e^{\,2} - R_i^{\,2} \right)}_{R^2} \left(R_e^{\,2} + R_i^{\,2} \right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\rho \pi L R^2}_{m} \frac{R^2}{2}}_{I_{cyl}} \frac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{R^2} = I_{cyl} \times \frac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{R^2}$$

Conclusion

$$\begin{cases} I_{cyl} = m \cdot \dfrac{R^2}{2} \\[2ex] I_{tube} = m \times \dfrac{R^2}{2} \times \dfrac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{R^2} \end{cases}$$



d'où

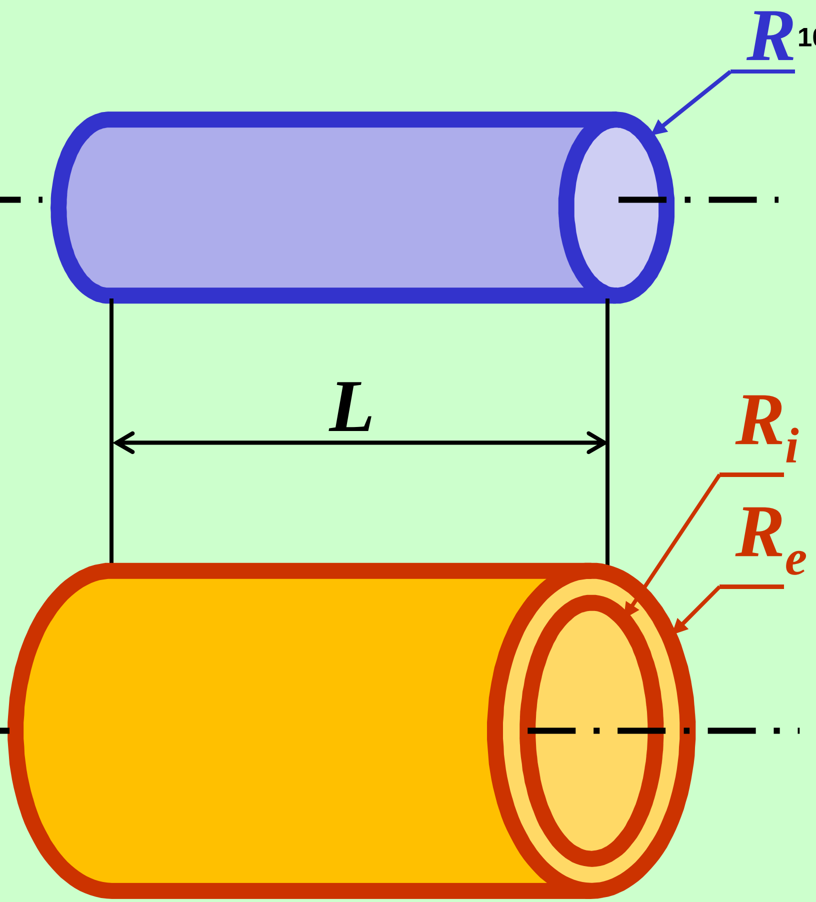
$$I_{tube} = I_{cyl} \times \frac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{R^2}$$

$$\boldsymbol{I_{tube} \gg I_{cyl}}$$

Rayons de giration

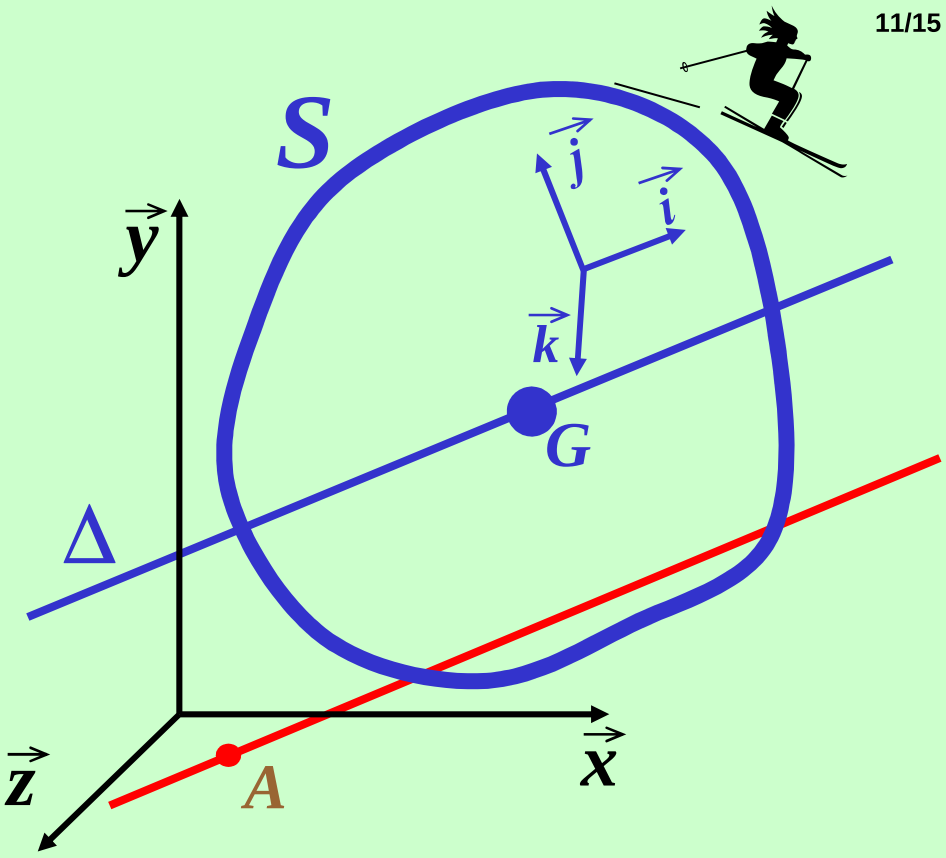
$$
\begin{cases}
I_{cyl} = m\,.\dfrac{R^2}{2} = m \times \boxed{\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)}^2 \\[2ex]
I_{tube} = I_{cyl} \times \dfrac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{R^2}
\end{cases}
$$

$$
= m \times \boxed{\left(\sqrt{\dfrac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{2}}\right)}^2
$$



$$
\Rightarrow \quad R_{\text{giration tube}} \gg R_{\text{giration cylindre}}
$$

d) Théorème de Huygens :



But de l'étude

On suppose connu le moment d'inertie par rapport à un axe Δ passant par G et on cherche le moment d'inertie par rapport à un axe qui lui est parallèle et passant par un point A.

$$I_{Ai}(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 . dm$$

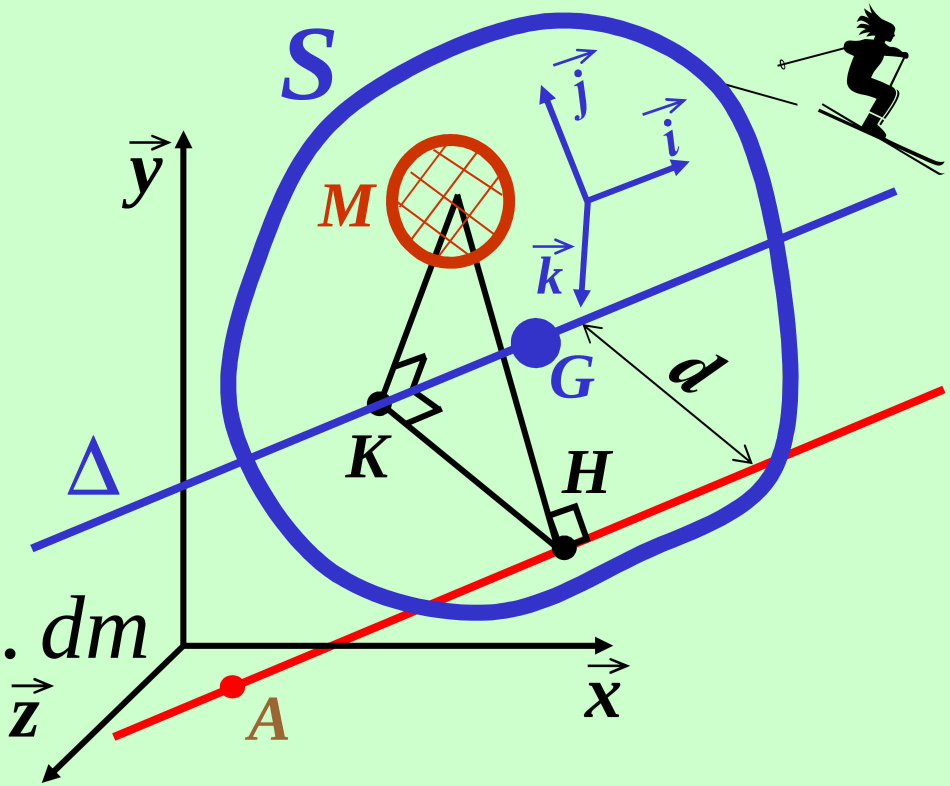
avec $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KM}$

$$I_{Ai}(S) = \overrightarrow{HK}^2 . \int_S dm + \int_S \overrightarrow{KM}^2 . dm$$

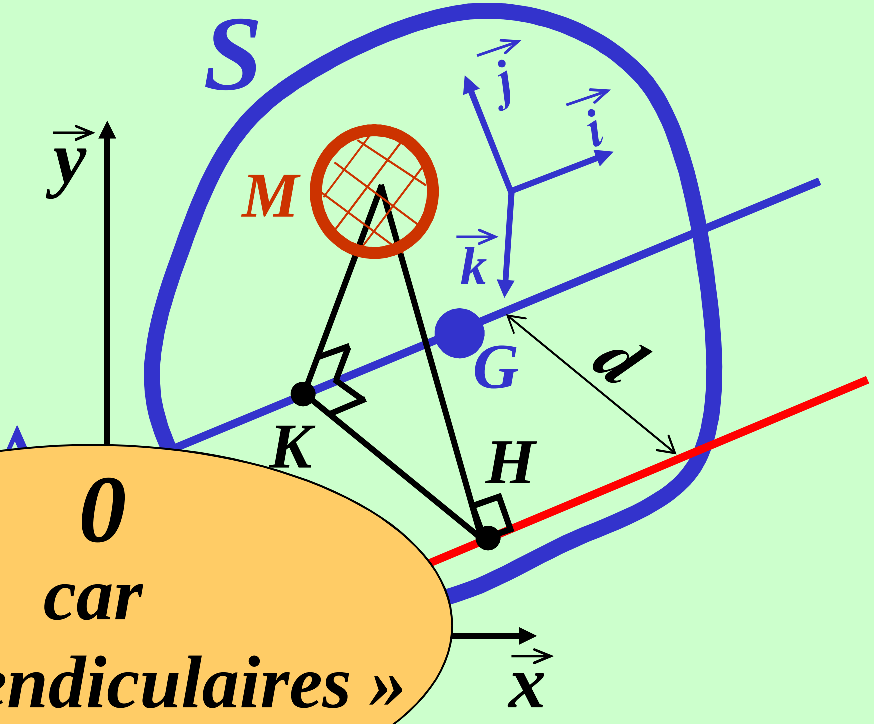
$$+ 2. \int_S \overrightarrow{HK} . \overrightarrow{KM}\, dm$$

or $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GM}$ $\Rightarrow$ $I_{Ai}(S) =$

$$d^2 . m + I_{Gi}(S) + 2. \int_S \overrightarrow{HK} . \overrightarrow{KG}\, dm + 2. \int_S \overrightarrow{HK} . \overrightarrow{GM}\, dm$$



$$I_{Ai}(S) = d^2.m + I_{Gi}(S) + 2.\int_S \cancel{\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KG}\,dm} + \underbrace{2.\int_S \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{GM}\,dm}$$

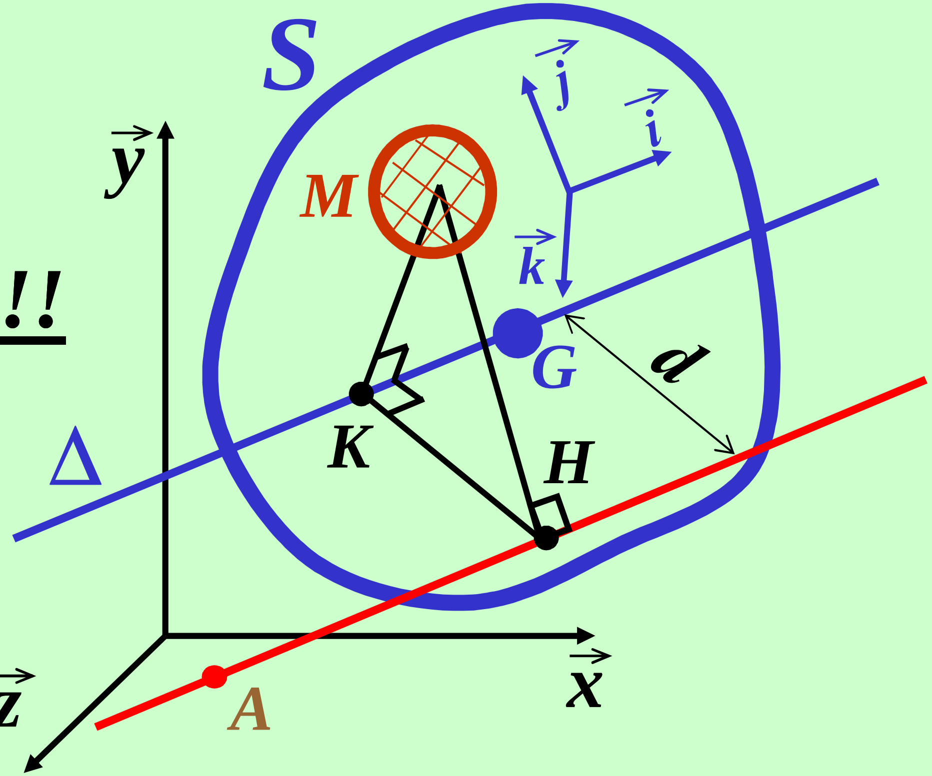


0
car
« perpendiculaires »

$$2\,.\,\overrightarrow{HK}\,.\cancel{\int_S \overrightarrow{GM}\,dm}$$

$\vec{0}$
car G est CdG

Uniquement dans ce sens !!!



d'où finalement :

$$I_{Ai}(S) = I_{Gi}(S) + m\,.d^2$$

FIN

de la 2ème partie

3) MATRICE D'INERTIE

La notion d'opérateur d'inertie, et la matrice qui lui est associée, permet de définir complètement un solide d'un point de vue inertiel.
Cela permettra de caractériser son comportement face aux accélérations.

a) Définition : ***dans un prochain cours nous aurons besoin de calculer l'intégrale suivante :***

$$☹ \quad \boxed{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).dm} \quad ☹$$

A étant un point quelconque

Le cours de mathématique permet de dire qu'il existe une matrice 3x3 telle que :

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).dm = I(A,S) \times \overrightarrow{\Omega}$$

☞ ***La matrice I(A,S) sera appelée opérateur d'inertie , ou matrice d'inertie , du solide S au point A.***

b) Expression analytique de la matrice d'inertie :

L'intégrale précédente est à calculer au point A.
Pour simplifier le calcul nous allons d'abord la calculer au centre du repère.
Le changement de point sera vu par la suite.

D'une façon générale l'origine du repère utilisé est le centre de gravité G.

Donc, soit G le centre du repère lié au solide S et M un point « courant » du solide de composantes (x , y , z).

Remarque préliminaire : ***le calcul d'un produit vectoriel peut se faire de deux façons différentes :***

▶ ***Classiquement :***

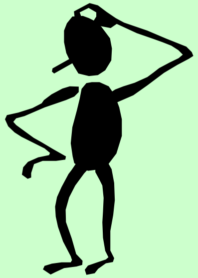
$$\overrightarrow{GM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c.y - b.z \\ a.z - c.x \\ b.x - a.y \end{pmatrix}$$

▶ ***Avec une matrice 3x3 :***

$$\overrightarrow{GM} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c.y - b.z \\ a.z - c.x \\ b.x - a.y \end{pmatrix}$$

On peut donc associer à l'opérateur $\left(\overrightarrow{GM} \wedge\right)$ ***la matrice :***

$$\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \times$$



d'où le calcul possible de l'intégrale initiale :

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).dm$$

en partant du centre du repère G
et non du point quelconque A.

d'où $$\int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}) \times dm$$

$$= -\int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{GM} \wedge \vec{\Omega}) \times dm$$

$$= -\int_S \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \times \vec{\Omega} \times dm$$

$$= \boxed{\int_S \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}} \times \vec{\Omega} \times dm$$

L'expression finale de la matrice d'inertie du solide S au point G est donc la suivante :

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2).\,dm & -\int_S xy.dm & -\int_S xz.dm \\ & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S yz.dm \\ & & \int_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_G$$

$$=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_G$$

Nota : ***la matrice d'inertie est toujours symétrique quel que soit le point (ou la base) d'écriture.***

Moment d'inertie par rapport à l'axe $G\vec{x}$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $G\vec{y}$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $G\vec{z}$

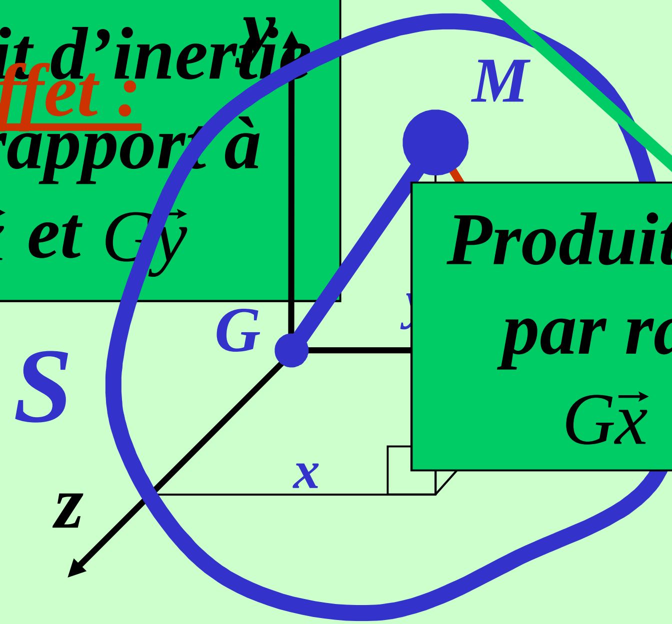
$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_G$$

Produit d'inertie par rapport à $G\vec{x}$ et $G\vec{y}$

Produit d'inertie par rapport à $G\vec{x}$ et $G\vec{z}$

Produit d'inertie par rapport à $G\vec{y}$ et $G\vec{z}$

en effet :



$I_{G\vec{x}} = \int \overrightarrow{HM}^2 \, dm$

$= y^2+z^2$

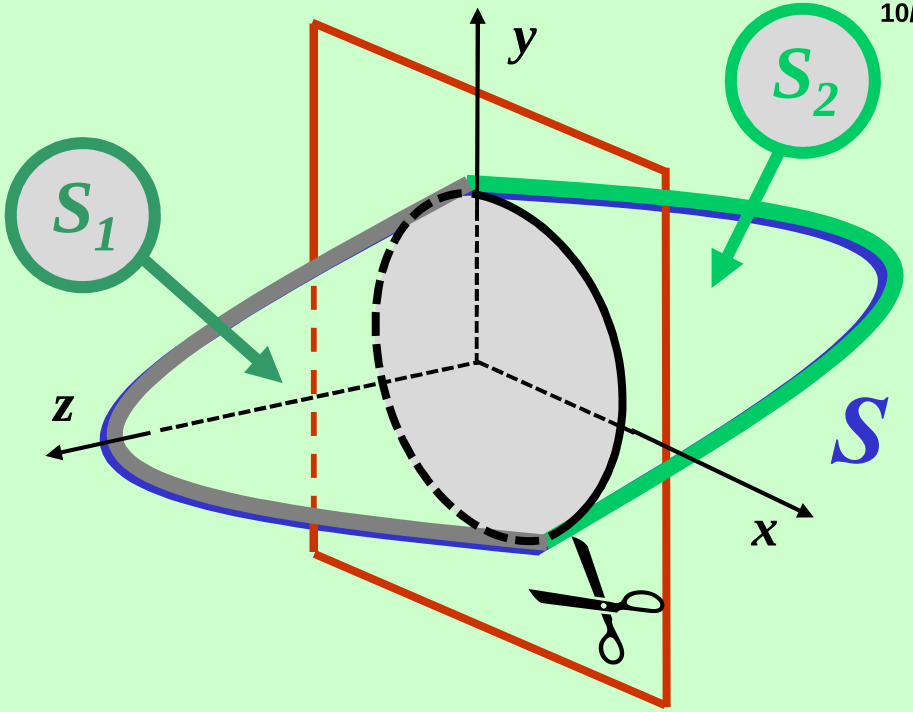
c) Trièdre principal d'inertie :

Comme la matrice d'inertie est réelle et symétrique, il existe donc (en tout point) une base où la matrice est diagonale.

$$\begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix}$$

- *Cette base particulière est appelée* ***trièdre principal d'inertie****.*
- *A' B' C' sont les* ***moments principaux d'inertie****.*
- *Si de plus cette base est centrée en G alors le repère ainsi formé est appelé* ***repère central d'inertie****.*

d) Plan de symétrie :



Si le plan xGy est plan de symétrie alors on peut décomposer le solide S en deux parties égales S_1 et S_2.

En faisant les calculs sur deux points symétriques M et M' de composantes (x,y,z) et (x,y,-z) on obtient pour D :

$$D = -\int_S y.z.dm$$

$$= \left\{ -\int_{S_1} y.z.dm + \int_{S_2} y.(-z).dm \right\} = 0$$

De même pour le calcul de E :

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_G$$

on dit dans ce cas là que l'axe $G\vec{z}$ est axe principal d'inertie.

e) Deux plans perpendiculaires de symétrie :

Si deux plans, parmi (x G y) (y G z) (x G z) , sont plans de symétrie matérielle alors :

la matrice <u>en G</u> est <u>diagonale</u> → $\boldsymbol{D = E = F = 0}$

Le trièdre (G x y z) est donc un <u>trièdre principal d'inertie</u>.

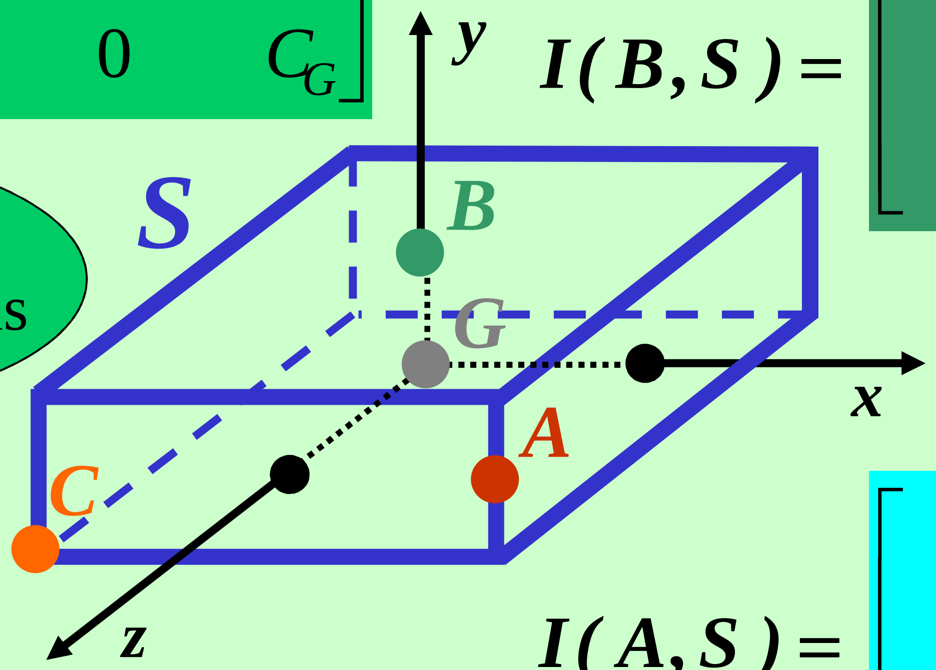
☞ 

attention la réciproque est fausse

Petit test de compréhension

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & B_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{bmatrix}$$

A_G B_G C_G sont les moments minis

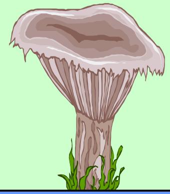


$$I(B,S)=\begin{bmatrix} A_B & 0 & 0 \\ 0 & B_B & 0 \\ 0 & 0 & C_B \end{bmatrix}$$

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A_A & 0 & -E_A \\ 0 & B_A & 0 \\ -E_A & 0 & C_A \end{bmatrix}$$

$$I(C,S)=\begin{bmatrix} A_C & -F_C & -E_C \\ -F_C & B_C & -D_C \\ -E_C & -D_C & C_C \end{bmatrix}$$

f) Axe de révolution :



Si l'axe $G\vec{z}$ est un axe de révolution matérielle alors la matrice est non seulement diagonale (conséquence de ce qui précède) mais de plus :

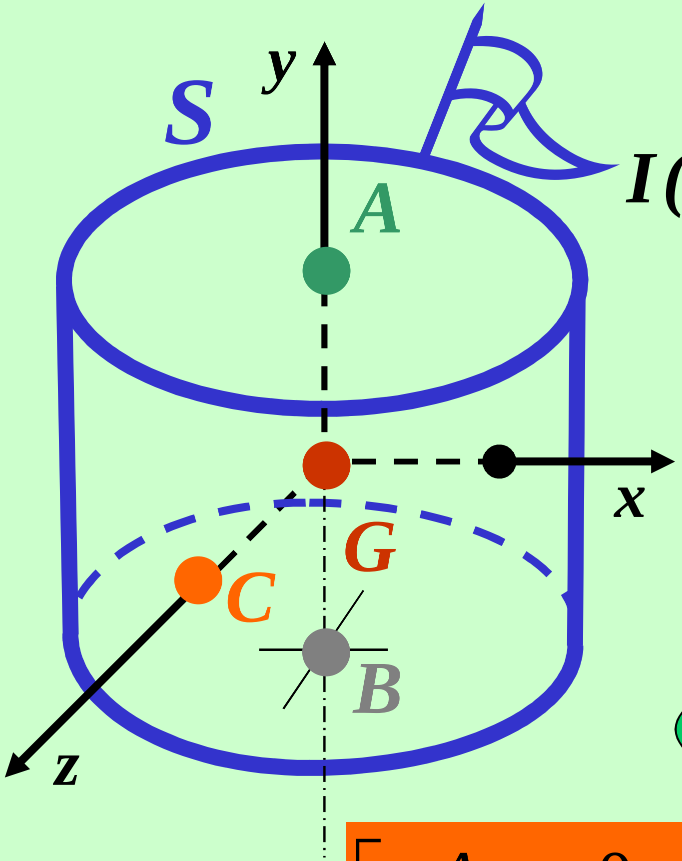
$$I(G,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

A=B

☞ 

Attention la réciproque est ici aussi fausse !!!

Deuxième petit test de compréhension



$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A_A & 0 & 0 \\ 0 & B_A & 0 \\ 0 & 0 & A_A \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A_A \neq A_G \\ B_A = B_G \end{cases}$$

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & B_G & 0 \\ 0 & 0 & A_G \end{bmatrix}$$

$$A_B = A_A \ \text{et} \ B_B = B_A$$

$$I(C,S)=\begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C & 0 \\ 0 & 0 & C_C \end{bmatrix}$$

$$I(B,S)=\begin{bmatrix} A_B & 0 & 0 \\ 0 & B_B & 0 \\ 0 & 0 & A_B \end{bmatrix}$$

g) Changement de point ⟶ théorème de Huygens

☞ ***On suppose connue la matrice d'inertie au centre de gravité G et on cherche à la calculer en un autre point A.***

☞ ***Le repère utilisé est le repère R centré en O et relatif à la base B.***

☞ ***Les composantes du point A sont définies par le vecteur suivant :***

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$I(A,S)\times\vec{\Omega} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).dm$$

$$= \int_S (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}) \wedge \left\{ \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}) \right\}.dm$$

d'où en développant :

$$= \int_S \overbrace{\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG})}^{\text{à sortir de l 'intégrale}}.dm + \int_S \overbrace{\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge}^{\text{à sortir de l 'intégrale}} \overrightarrow{GM}).dm$$

$$+ \int_S \overrightarrow{GM} \underbrace{\wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG})}_{\text{à sortir de l 'intégrale}}.dm + \boxed{\int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}).dm}$$

$$\boxed{I(G,S).\vec{\Omega}}$$

d'où :

$$I(A,S).\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{bmatrix}_B \times \vec{\Omega}$$

$$\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) . \int_S dm \longrightarrow \text{masse totale: } m$$

$$+ \overrightarrow{AG} \wedge \left\{\vec{\Omega} \wedge \cancel{\int_S \overrightarrow{GM}.dm}\right\} \quad \vec{0}$$

$$+ \left\{\cancel{\int_S \overrightarrow{GM}.dm}\right\} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right)$$

$$\vec{0}$$

$$+ I(G,S).\vec{\Omega}$$

d'où finalement :

les 3 matrices sont dans la même base !!!

$$I(A,S)_B = I(G,S)_B + m.\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{bmatrix}_B$$

avec $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ☞ *on a le même résultat en prenant le vecteur de position* $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG}$ ☺

Nota :

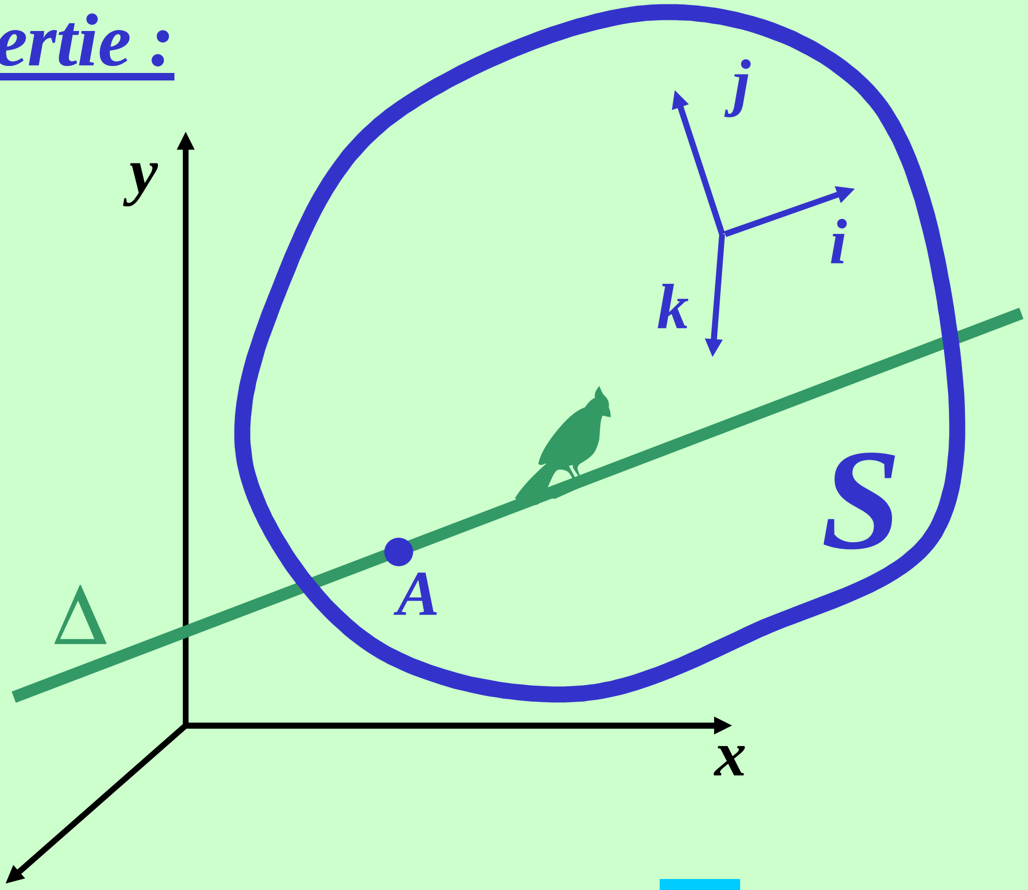
Pour obtenir la matrice d'inertie en un point quelconque A à partir d'un autre point quelconque B il suffit d'appliquer Huygens en A, puis en B et de faire ensuite la différence des deux expressions pour éliminer I(G,S).

☞ $$I(A,S) = I(G,S) + m \, . \, I_1$$

☞ $$I(B,S) = I(G,S) + m \, . \, I_2$$

d'où : $$\boxed{I(A,S) = I(B,S) + m \, . \, I_1 - m \, . \, I_2}$$

h) Moment d'inertie par rapport à un axe en utilisant la matrice d'inertie :

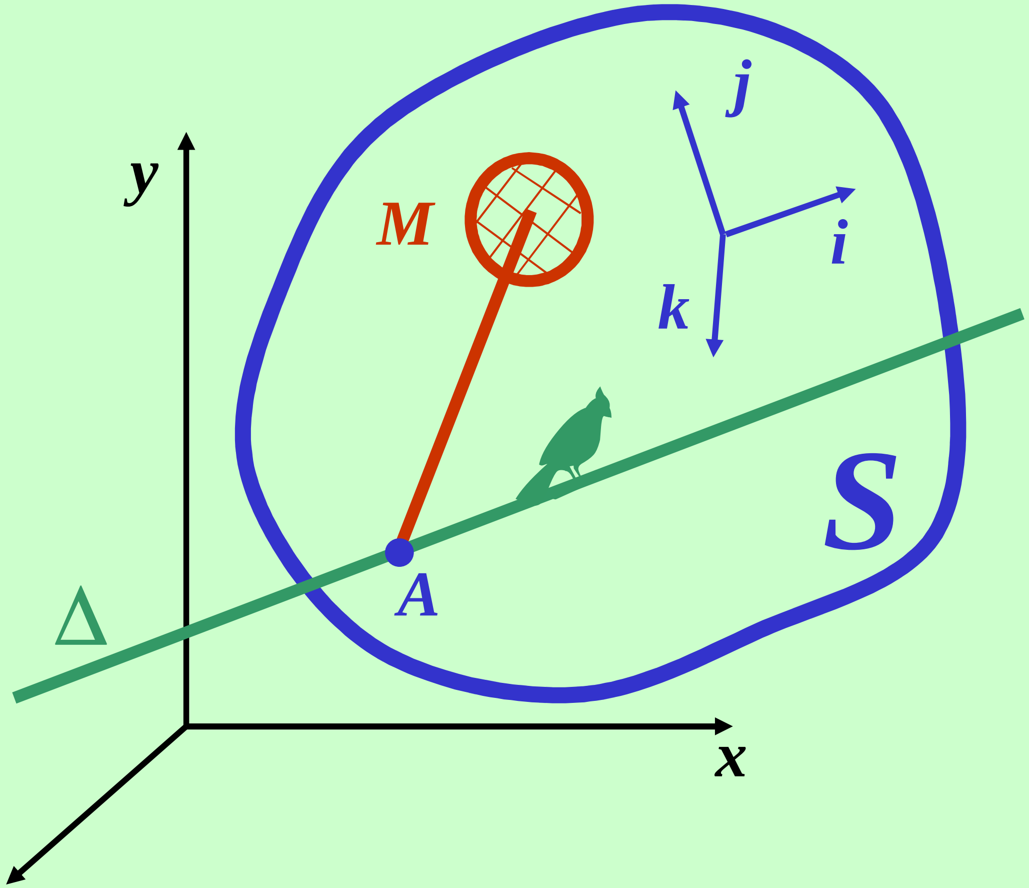


On suppose connaître la matrice d'inertie du solide S en un point A.

Soit un axe quelconque Δ de vecteur unitaire $\vec{i}$ ***et passant par ce point A.***

Calculons l'expression suivante :
(à tout hasard…)

$$\vec{i}\,.\left\{ I(A,S)\times\vec{i} \right\}$$



$$\vec{i}\,.\left\{ I(A,S)\times\vec{i} \right\} = \vec{i}\,.\left\{ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{AM}).dm \right\}$$

Le double produit vectoriel peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\times\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\times\vec{C}}$$

donc $\vec{i}\,.\int_S \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{AM}).dm$

$$\Rightarrow \vec{i}\,.\left\{\int_S\left[(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM})\times\vec{i}-(\overrightarrow{AM}.\vec{i})\times\overrightarrow{AM}\right]\times dm\right\}$$

$$=\int_S\left\{\overrightarrow{AM}^2\,\underbrace{\vec{i}.\vec{i}}_{=1}-(\overrightarrow{AM}.\vec{i})\;\overrightarrow{AM}.\vec{i}\right\}\times dm$$

$$=\int_S\left\{\overrightarrow{AM}^2-\overbrace{(\overrightarrow{AM}.\vec{i})}^{AH}{}^2\right\}\times dm$$

$$=\int_S\left\{\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{AH}^2\right\}\times dm=\int_S\overrightarrow{HM}^2\times dm=I_\Delta(S)$$

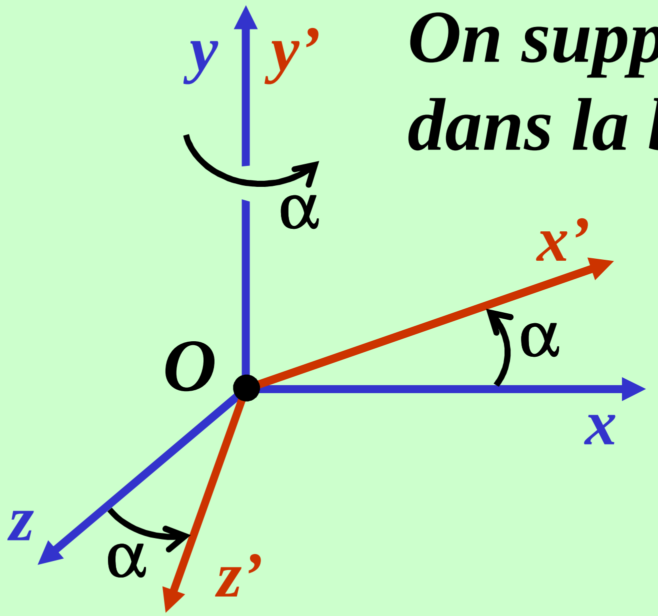
finalement

$$I_\Delta(S) = \vec{i} \,.\, \left\{ I(A,S) \times \vec{i} \right\}$$

<u>même base pour le calcul !</u>

i) Changement de base :

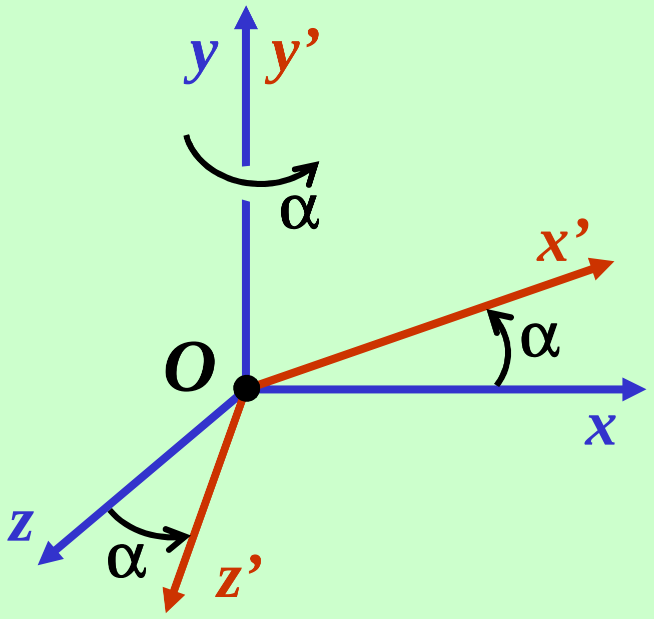
Il est parfois nécessaire de recourir à un changement de base, c'est à dire à un changement d'orientation tout en restant au même point.



Soient donc deux bases B et B' relatives à deux repères R et R' de même origine O.

On suppose connue la matrice d'inertie $I(O,S)_B$ dans la base B.

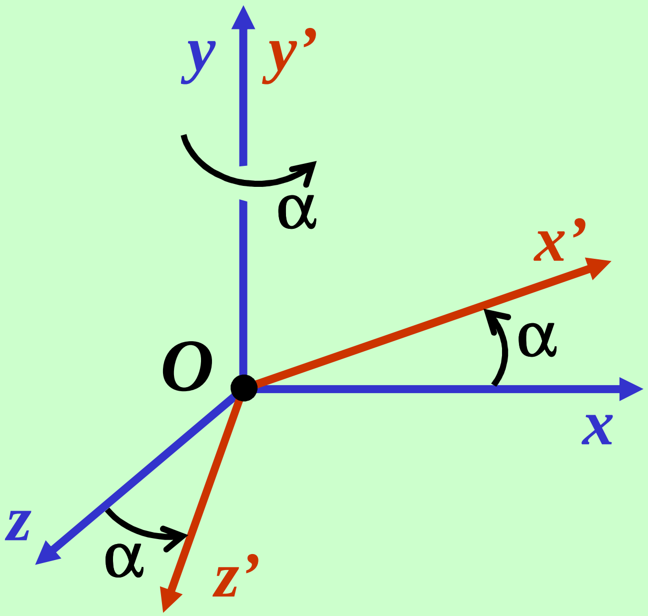
On définit la matrice de passage P de B vers B' présentant en colonne les composantes des vecteurs de la base B' exprimées dans la base B.



$$P_{B \to B'} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \end{array} \end{array}$$

$$P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



et on a :

$$\boxed{I(O,S)_{B'} = P^{-1} \times I(O,S)_B \times P}$$

4) MATRICES D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES

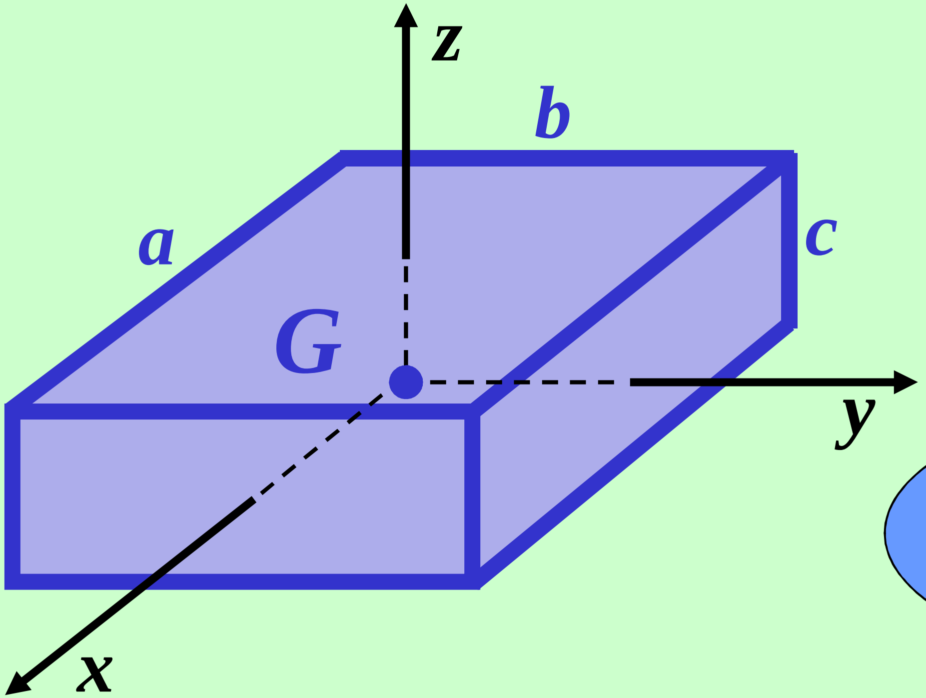
☞ ***Parallélépipède rectangle***

☞ ***Cylindre***

☞ ***Cône***

☞ ***Sphère***

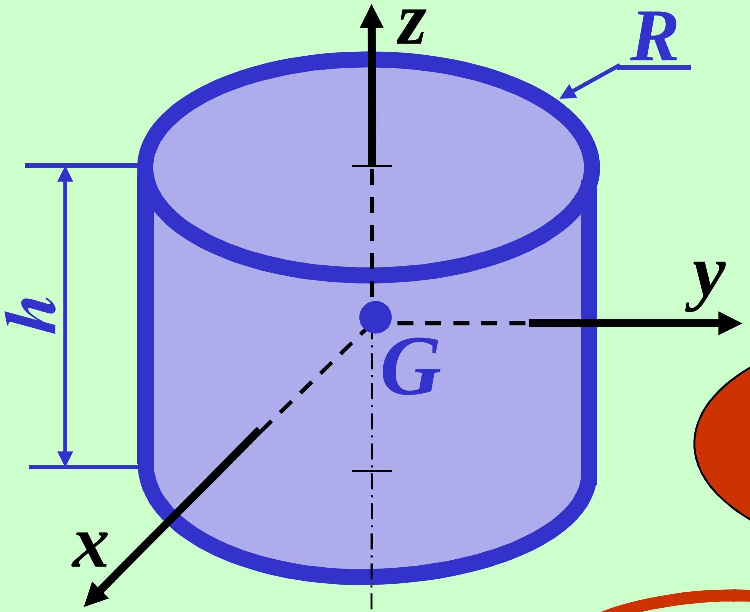
Parallélépipède



au moins 2 plans de symétrie

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}$$

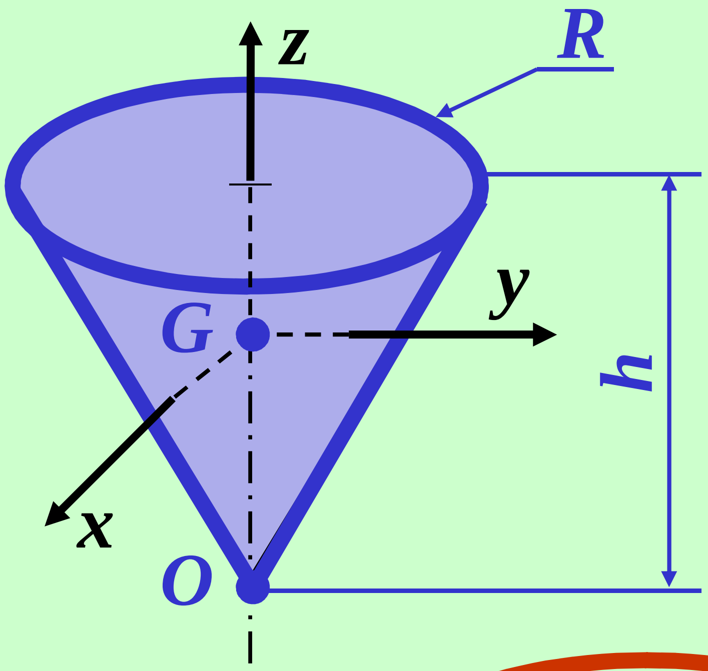
Cylindre



$G\vec{z}$ axe de révolution

au moins 2 plans de symétrie

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$



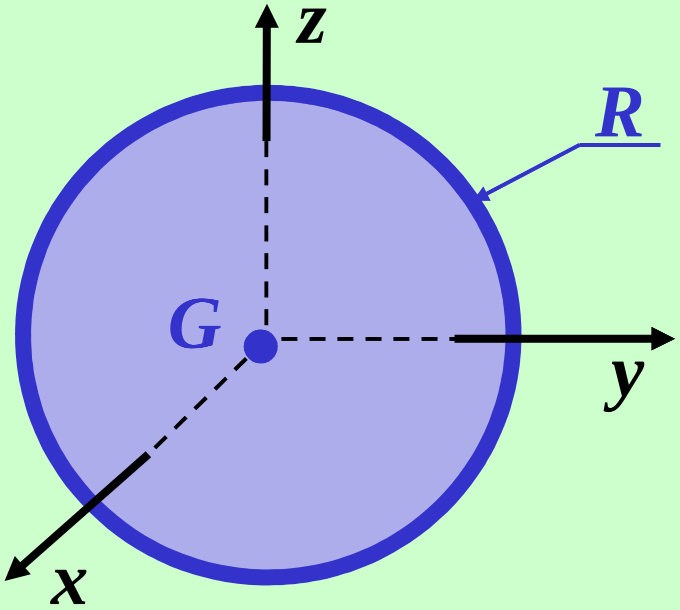
Cône

$G\vec{z}$ axe de révolution

au moins 2 plans de symétrie

☠

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} \frac{3m}{20}\left(R^2+4h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{20}\left(R^2+4h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mR^2}{10} \end{bmatrix}$$



Sphère

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}$$

FIN