PSI

SÉRIES NUMÉRIQUES

1) Etudier la nature et calculer la somme des séries de terme général :

a) Pour $n \geqslant 2$, $\quad u_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2})$

b) Pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

c) Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 0$, $\quad u_n = z^{2n}3^{-n}$

d) Pour $n \geqslant 0$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ On pourra remarquer que : $\forall\, k \geqslant 0, \quad \dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\, dt.$

2) Quelle est la nature des séries :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{\,-u_n}}{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\frac{\pi}{2})^a - (\arctan n)^a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \cos\left(n^2\pi \ln(\frac{n}{n-1})\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n}{n+1}$ où $a \in \mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{\prod_{k=1}^{n}(1+b^k)}$ où $b > 0$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$

h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$

3) Soit $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ une série à termes réels positifs.

a) Montrer que si $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge alors la série $\left(\sum u_n^2\right)_{n\geqslant 0}$ converge.
La réciproque est-elle vraie ?
Le résultat est-il encore vrai si (u_n) n'est pas à termes positifs ?

b) Montrer que si $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge alors la série $\left(\sum u_{2n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge.
La réciproque est-elle vraie ?
Le résultat est-il encore vrai si (u_n) n'est pas à termes positifs ?

4) Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\quad w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(n-k)!}$ où $n \geqslant 1$.

5) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
Etudier la nature de la série produit de la série de terme général u_n par elle même.
On pourra utiliser l'inégalité : $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{2}(a+b).$

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

a) Justifier l'existence de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est sa limte ?

b) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} (n+1)!R_n = 1$. On utilisera un encadrement.

c) En déduire la nature de la série de terme général $\sin(2\pi e(n!))$.

7) On considère la série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$. On note R_n le reste d'ordre n.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(\alpha-1)}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$

b) En déduire un équivalent de R_n.

8) Etudier la suite de terme général : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n$, où $n \geqslant 1$.

9) a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs tels que : $a_n \sim a'_n$.
Montrer que, si les séries $\sum a_n$ et $\sum a'_n$ convergent alors leurs restes d'ordre n, R_n et R'_n, sont équivalents.
Montrer que si les séries divergent, les sommes partielles S_n et S'_n sont équivalentes.

On considère la suite définie par $u_0 > 0$ *et* $\forall\, n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan u_n$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n u_n$. Etudier la série de terme général $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $K > 0$.

d) Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{3}\frac{K^3}{2^{2n}}$.

e) En utilisant **a)**, montrer que : $u_n = \frac{K}{2^n} + \frac{4K^3}{9}.\frac{1}{2^{3n}} + o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right)$.