PSI

SÉRIES ENTIÈRES

1) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}\, z^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\cos n}{\sqrt{n+(-1)^n}} z^n$

2) Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières dont les termes généraux sont :

a) $u_n(x) = (2n+1)x^n$ **b)** $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ **c)** $u_n(x) = (n^2+1)\dfrac{x^n}{n!}$.

3) Soit pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

4) a étant un réel fixé, étudier la série entière de terme général : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{\sin(na)}{n!}x^n$.

5) a) Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

b) Calculer sa somme $f(x)$ à l'aide d'un produit de Cauchy.

c) Retrouver le résultat en utilisant la relation : $\forall\, n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n}$

6) Soit $u_n(x) = \dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}x^{2n+1}$.

a) Determiner le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$. On notera f sa somme.

b) Calculer $(x^2-2)f'(x) + xf(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

c) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

7) Etablir l'existence et calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

On pourra introduire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}$.

8) Déterminer les développements en série entière des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^3}$ **b)** $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ et $f(x) = \dfrac{\sin a}{1-2x\cos a + x^2}$.

9) Calculer le développement en série entière de la fonction : $f(x) = \arctan \dfrac{2(x+1)}{x-4}$.
On précisera le rayon de convergence de ce développement.

10) Trouver le développement en série entière de $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2/2}dt$.
On utilisera une équation différentielle vérifiée par f.

11) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \neq 1,\quad h(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ et $h(1) = 0$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

12) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_n > 0$ et $\lim\limits_{n\longmapsto+\infty} a_n = 0$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A telle que : $\forall\, x \in A,\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$.

a) Montrer que la série $(\sum v_n)$ définie sur A par $v_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ est uniformément convergente sur A.

b) Application :
Montrer que les séries entières $\left(\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\geqslant 0}$
sont uniformément convergentes sur $[0,1]$.
En déduire la valeur des sommes de ces séries pour $x = 1$.

13) a) Pour quelles valeurs de x la série $\left(\sum \dfrac{x^n}{(3n)!}\right)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $1 + j^n + j^{2n}$.

c) En deduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

14) a) Montrer que, à l'aide d'une série entière que : $\forall\, x \in [0,1[,\quad \dfrac{2x}{3} - \dfrac{x^2}{9} \leqslant (1+x)^{2/3} - 1 \leqslant \dfrac{2x}{3}$.

b) En appliquant ce qui précède à $x = \dfrac{1}{k}$, calculer la partie entière de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{10^7-1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.