PSI

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$.
A tout élément f de E, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi], \quad T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t) f(t)\ dt.$$

a) Montrer que T est bien définie et est un endomorphisme de E.

b) Calculer $T(\cos)$ et $T(\sin)$.

c) Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de T.

2) Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $f : E \longrightarrow E, \quad P \longmapsto XP - (X-1)^2 P'$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de f.

3) Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$.
On note pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} I - \lambda BA & B \\ 0 & I \end{bmatrix}_{[2n]} \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda A & I \end{bmatrix}_{[2n]} \quad \text{et} \quad N(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I - \lambda AB & \lambda A \end{bmatrix}_{[2n]} \times \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & B \end{bmatrix}_{[2n]}.$$

a) Comparer $M(\lambda)$ et $N(\lambda)$.

b) En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

4) Soient g et u deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E tels que : $g \circ u - u \circ g = 2u$.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g \circ u^n - u^n \circ g = 2nu^n$.

b) On suppose que E est de dimension finie et g est diagonalisable.
- Soit x un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ. Calculer pour $q \in \mathbb{N}$, $g(u^q(x))$.
- En déduire que : $\exists\, q_x \in \mathbb{N} \ / \ u^{q_x}(x) = 0_E$.
- En déduire que : $\exists\, N \in \mathbb{N} \ / \ u^N = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi u est nilpotent.

5) a) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $(f - Id)^3 \circ (f + 2Id) = 0$

et $(f - Id)^2 \circ (f + 2Id) \neq 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) A quelle condition une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux est-elle diagonalisable ?

6) $n \geqslant 2$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^2 = 2A + 8I_n$.

a) A est-elle inversible ?

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Résoudre $X^2 = 2X + 8I_n$ pour $X \in Vect(A, I_n)$.

7) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $A^4 = A^2$ et 1 et -1 soient des valeurs propres de A.
Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

8) Soit A et B des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}_{[2n]}$.

Montrer que : (M diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ (A et B diagonalisables)

9) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculer son polynôme caractéristique.

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme de degré 1 ou 2 annulateur de A.
En déduire tous les polynômes annulateurs de A.

d) Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Calculer A^n, pour tout entier n.

10) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Déterminer les sous-espaces vectoriels stables d'un élément de $\mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

11) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer , pour $p \in \mathbb{N}$, A^p en fonction de I_3, A etA^2.

12) a) Montrer qu'une matrice carrée qui commute avec une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont distincts deux à deux, est une matrice diagonale.

b) Résoudre l'équation de matrice inconnue M : $M^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13) Soit la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_{2n+1} & = & u_{2n} + u_{2n-1} \\ u_{2n} & = & u_{2n-1} + 2u_{2n-2} \end{cases}$
Exprimer u_n en fonction de n.