PROGRAMME 9

Semaine du 28 novembre au 3 décembre

Suites de fonctions : Les fonctions sont définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple et uniforme : Pour la convergence uniforme les fonctions sont bornées.
Convergence uniforme sur tout segment de I.

b) Propriétés : Continuité de la fonction limite, extension au cas d'une borne de I.
Dérivation, intégration de la limite d'une suite de fonctions.

2) Séries de fonctions : Les fonctions sont définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Convergence uniforme, normale sur I ou sur tout segment de I.
Lien entre les diverses convergence .

b) Propriétés de la somme d'une série de fonctions.

3) Intégrale dépendant d'un paramètre

a) Théorème de convergence dominée et d'échange série-intégrales (intégration terme à terme)

b) Continuité et dérivation de l'application : $F : A \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$

Questions de cours : Liste exhaustive.

- Différentes convergences de la suite de fonctions $f_n : t \geqslant 0 \longmapsto tn^a \,\mathrm{e}^{-nt}, \quad n \geqslant 1$ suivant les valeurs de a.
- Convergence simple, normale et uniforme de la série de fonction sur $\mathbb{R}_+$, $\sum f_n$ où $f_n : t \geqslant 0 \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+t^2}$
- Ensemble de définition, continuité, limite en $+\infty$ de la fonction zeta de Riemann. Etude des convergences de la série.
- $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$: ensemble de définition, domaine de continuité et de dérivabilité.
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Semaine du 5 au 10 décembre

1) Intégrale dépendant d'un paramètre

a) Théorème de convergence dominée et d'échange série-intégrales (intégration terme à terme)

b) Continuité et dérivation de l'application : $F : A \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$
Extension à la classe C^p.

2) Espaces vectoriels normés

a) Normes normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$, dans $M_n(\mathbb{K})$ et dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$:
$$||f||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad ||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt, \quad ||f||_2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$
Norme euclidienne associée à un produit scalaire.
Distances et boules. Parties et applications bornées d'un espace vectoriel normé $(E, ||\ ||)$.
$B(I,E) = \{$fonctions bornées de I dans $E\}$ est un espace vectoriel et
$N_\infty : f \longmapsto sup\{||f(x)|| \ / \ x \in I\}$ définit une norme sur $B(I,E)$.

b) Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finnie : définition, opérations, lien avec les suites coordonnées.

c) Définition des ouverts, des fermés. Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.
Définition des points adhérents, des points intérieurs, de la frontière.
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

Questions de cours : Liste exhaustive.
- Dans un evn : $\forall (X,Y) \in E^2, \quad N(X-Y) \leqslant N(X) + N(Y)$ et $|N(X) - N(Y)| \leqslant N(X-Y)$
- Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$: N_∞ et N_1 sont des normes et tracé des boules unité dans $\mathbb{R}^2$.
- Normes de $C([a,b],\mathbb{K})$: $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont des normes.
- $B(I,E) = \{$fonctions bornées de I dans $E\}$ est un espace vectoriel.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- $x \in \overline{A} \iff x$ est la limite d'une suite d'éléments de A.

Enoncé des théorèmes sur les intégrales à paramètre :

a) Cas d'un paramètre entier

th.

Théorème de convergence dominée :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Si **1)** pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I

2) (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I

3) il existe une fonction φ, continue par morceaux sur I, positive, intégrable sur I et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi$

alors Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I, et f est intégrable sur I

et $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$

th.

Intégration terme à terme :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Si **1)** pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux sur I et intégrable sur I

2) la série de fonctions $\left(\sum u_n\right)$ converge simplement sur I vers S, continue par morceaux sur I

3) la série numérique $\left(\sum \int_I |u_n|\right)$ converge

alors S est intégrable sur I et $\displaystyle \int_I S = \int_I \sum_0^{+\infty} u_n = \sum_0^{+\infty} \int_I u_n$ et on a de plus $\displaystyle \int_I |\sum_0^{+\infty} u_n| \leqslant \sum_0^{+\infty} \int_I |u_n|$

b) Continuité et dérivation de l'application : $F : A \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$

th.

Si **1)** $\forall x \in A, \quad \big(t \longmapsto f(x,t)\big)$ est continue par morceaux sur I

2) $\forall t \in I, \quad \big(x \longmapsto f(x,t)\big)$ est continue sur A

3) pour $[\alpha,\beta]$ un segment quelconque de A,
$\exists\, \varphi : t \longmapsto \varphi(t)$, continue par morceaux, positive, intégrable sur I et
telle que $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta]\times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

alors $\forall x \in A, \quad \big(t \longmapsto f(x,t)\big)$ est intégrable sur I et $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est continue sur A

th.

Si **1)** $\forall x \in A, \quad \big(t \longmapsto f(x,t)\big)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $A \times I$ et $\left(x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est continue sur A
et $\left(t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est continue par morceaux sur I

3) pour $[\alpha,\beta]$ un segment quelconque de A,
$\exists\, \psi : t \longmapsto \psi(t)$, continue par morceaux, positive, intégrable sur I et
telle que $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta]\times I, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$

alors $\forall x \in A, \quad \left(t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est intégrable sur I et
$F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur A et $\forall x \in A, \quad F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$