PROGRAMME 5

Semaine du 17 au 19 octobre et du 3 au 5 novembre

1) Séries réelles et complexes : Exercices

2) Matrices et déterminants

Matrices d'un système de vecteurs, d'une application linéaire, rang, opérations, transposée, inverse.
Matrices symétriques et antisymétriques, triangulaires.
Changement de bases , matrices semblables, trace d'un endomorphisme
Matrices par blocs, polynomes de matrices et d'endomorphismes. Déterminants (révisions)

3) Réduction des endomorphismes

a) Eléments propres d'un endomorphisme : Valeurs propres, vecteurs propres :
Si v commute avec u , les sous espaces propres de u sont stables par v
Cas des valeurs propres deux à deux distinctes : Les SEP sont en somme directe
Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
Eléments propres d'une matrice.

b) Polynôme caractéristique : somme et produit des valeus propres quand χ_A est scindé.
Ordre de multiplicité des valeurs propres
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u
$1 \leqslant$ dim (SEP (λ)) $\leqslant$ ordre de multiplicité de λ.

c) Diagonalisation en dimension finie : Caractérisation avec la somme des dimensions des sous espaces propres.
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$ et
$\forall \lambda \in Sp(u), \quad \dim(E_\lambda) =$ ordre de multiplicité de λ
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé et à racines simples.
Théorème de Cayley Hamilton (admis)
Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .
Si u est diagonalisable, pour tout sous espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F l'est aussi.

d) Trigonalisation en dimension finie sur des exemples. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

e) Utilisation : Puissance $n-$ième de matrices, suites récurrentes linéaires à coefficients constants, commutant d'une matrice.

Questions de cours :

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé et l'application $\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ Alors $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \neq \{0\}$.
- Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\ v$ sont stables par u.
- Calcul du déterminant de VanderMonde
- Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u
  $1 \leqslant$ dim (SEP (λ)) $\leqslant$ ordre de multiplicité de λ.
- Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre λ alors $u = \lambda.Id_E$.
- Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .

BONNES VACANCES !!!!

Semaine du 7 au 12 novembre

1) Réduction des endomorphismes : Voir ci-dessus

2) Intégrales impropres ou généralisées

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Définition :

Si $f \in C_0^m([a,b[,\mathbb{K})$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente lorsque $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{K}$.

Linéarité, relation de Chasles,cas d'un "faux problème " en b (prolongement par continuité).

La nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de f au voisinage de b

Exemples de référence : Intégrales de Riemann, exponentielle, logarithme.

Calcul d'une intégrale impropre : Changement de variables et intégration par parties.

b) Intégrale de fonctions positives : L'intégrale sur $[a,b[$ converge ssi la primitive est majorée.

Règles usuelles de comparaison.

Cas d'une intégrale nulle. Comparaison série-intégrale :

th. 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive sur $[a,+\infty[$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, alors :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt\right)$ est convergente.

th. 2 Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue ou continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante.
La série $\left(\sum f(n)\right)$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,dt$ converge.

c) Absolue convergence et intégrabilité :

f est intégrable ou son intégrale est absolument convergente sur I lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Une intégrale absolument convergente est convergente.

<u>**Questions de cours**</u> : Liste exhaustive.

- Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u
  $1 \leqslant \dim(\text{SEP}(\lambda)) \leqslant$ ordre de multiplicité de λ.
- Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre λ alors $u = \lambda.Id_E$.
- Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .
- Pour une fonction positive, l'intégrale sur $[a,b[$ converge ssi $\displaystyle\left(x \longmapsto \int_a^x f(t)dt\right)$ est majorée.
- Convergences des intégrales de Riemann en $+\infty$ et en $b \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$.
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$

<u>Prévisions</u> : Suites et séries de fonctions.