ANALYSE

HARMONIQUE

1) Rappels et définitions

2) Lieux de Bode

3) Action proportionnelle

4) Intégrateur

5) Premier ordre

6) Deuxième ordre

1) Rappels et définitions

$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{système}} \longrightarrow s(t)$

Un système dynamique, continu, linéaire, invariant, monovariable est décrit par une équation différentielle linéaire, à coefficients constants de la forme suivante :

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots\ldots + a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) =$$
$$b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots\ldots + b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

- ***$a_0 \ldots\ldots a_n$ et $b_0 \ldots\ldots b_m$ sont des constantes***
- ***n est l'ordre du système***
- ***pour les systèmes physiques on a toujours : $m \leqslant n$***

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + ...+ a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) =$$
$$b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + ...+ b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

La fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace, en se plaçant dans les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles), est alors :

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m\, p^m + ...+ b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + ...+ a_1\, p + a_0}$$

Caractérisation d'un signal sinusoïdal

L'analyse harmonique d'un système consiste à lui appliquer une entrée e(t) sinusoïdale, notée :

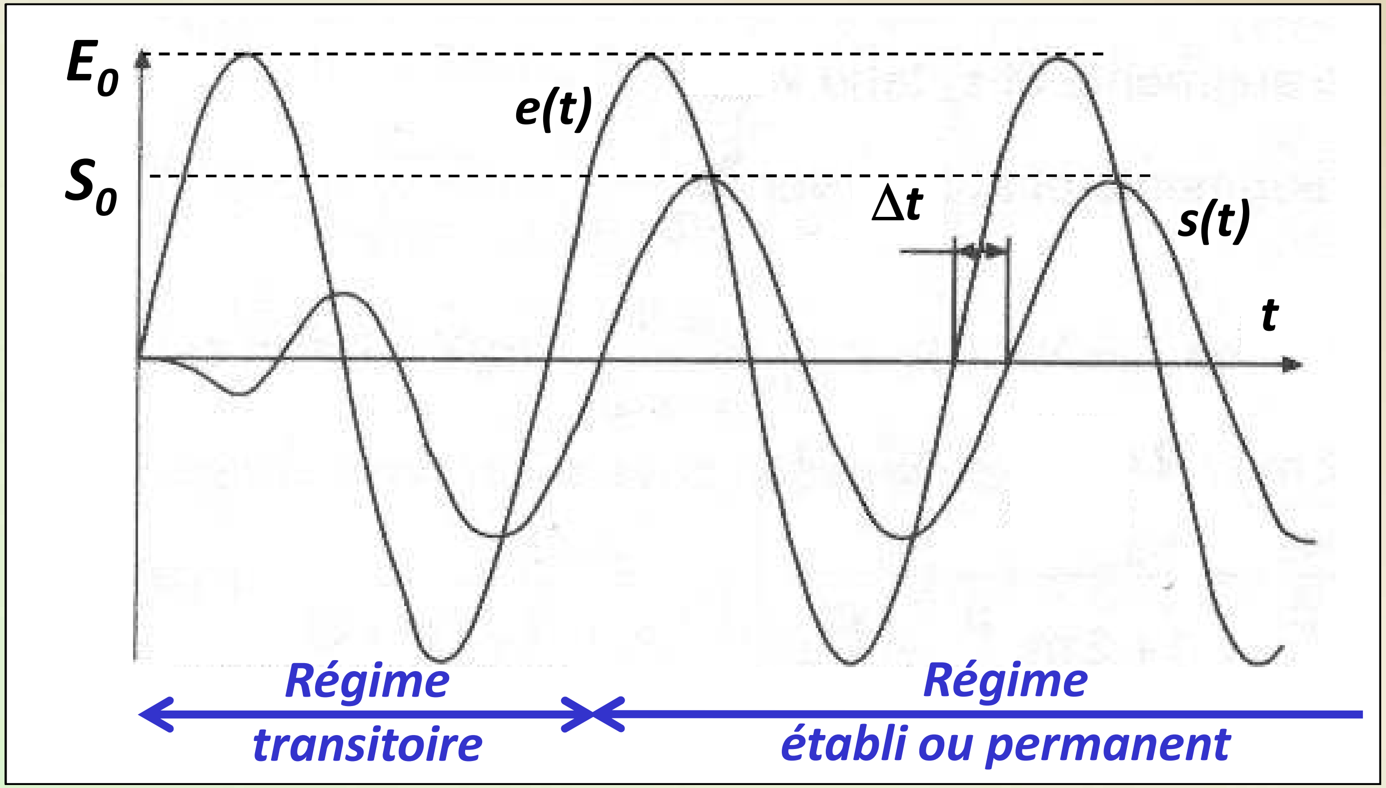
$$e(t) = E_0 \times \sin(\omega . t)$$

☞
- ***E_0 est l'amplitude du signal (nombre positif) de même unité que e(t)***
- ***ω est la pulsation du signal en rad/s***

Rappel :

$$\underset{\text{pulsation (rad/s)}}{\omega} = 2\pi \underset{\text{fréquence (Hz ou s}^{-1}\text{)}}{f} = \frac{2\pi}{\underset{\text{période (s)}}{T}}$$

Pour un système stable et une fois le régime permanent atteint la sortie s(t) est <u>également sinusoïdale et de même pulsation</u>. Elle est plus ou moins amplifiée et plus ou moins retardée.



$$\boxed{e(t) = E_0 \times \sin(\omega . t)}$$

$$\boxed{s(t) = S_0 \times \sin(\omega . t + \varphi)}$$

avec $\boxed{\varphi = \Delta t \times \omega}$

Amplitude du signal de sortie de même unité que s(t)

Retard exprimé en ° ou rad

rad ***rad/s***

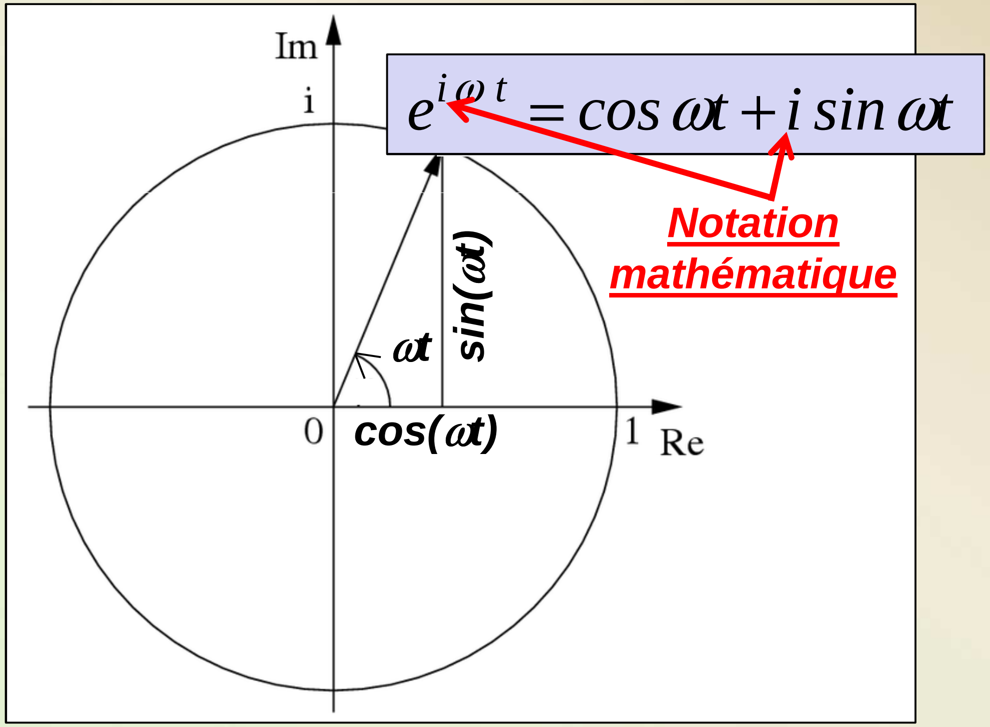
Analyse harmonique du régime permanent

L'analyse harmonique d'un système stable s'intéresse à l'évolution du rapport des amplitudes et du déphasage (retard) entre la sortie et l'entrée (en régime établi) en fonction de la pulsation ω.

Pour « plus de simplicité » (comme en physique) nous allons utiliser les fonctions complexes suivantes :

$$☞ \begin{cases} \underline{e}(t) = E_0 \times e^{j\omega t} \\ \underline{s}(t) = S_0 \times e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} e(t) = \mathrm{Im}(\underline{e}(t)) \\ s(t) = \mathrm{Im}(\underline{s}(t)) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \underline{e}(t) = E_0 \times e^{j\omega t} \\ \underline{s}(t) = S_0 \times e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e(t) = \mathrm{Im}(\underline{e}(t)) \\ s(t) = \mathrm{Im}(\underline{s}(t)) \end{cases}$$

L'analyse harmonique s'intéresse aux deux quantités :

- ***rapport des amplitudes :*** $\dfrac{S_0}{E_0} = \left|\dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}\right|$

- ***déphasage (retard) de la sortie avec l'entrée :*** $\varphi = Arg\left(\dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}\right)$

Fonction de transfert harmonique

Il est nécessaire de définir, d'après les résultats précédents, l'expression de :

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S_0 \times e^{j(\omega t + \varphi)}}{E_0 \times e^{j\omega t}}$$

Pour cela, injectons $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$ dans l'équation différentielle temporelle initiale :

$$a_n \times \frac{d^n \underline{s}(t)}{dt^n} + \ldots\ldots + a_2 \times \frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + a_0 \times \underline{s}(t) = b_m \times \frac{d^m \underline{e}(t)}{dt^m} + \ldots\ldots + b_2 \times \frac{d^2 \underline{e}(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + b_0 \times \underline{e}(t)$$

$$\Rightarrow \quad a_n (j\omega)^n \underline{s}(t) + \ldots\ldots + a_2 (j\omega)^2 \underline{s}(t) + a_1 (j\omega) \underline{s}(t) + a_0 \times \underline{s}(t) = b_m (j\omega)^m \underline{e}(t) + \ldots\ldots + b_2 (j\omega)^2 \underline{e}(t) + b_1 (j\omega) \underline{e}(t) + b_0 \times \underline{e}(t)$$

$$\Rightarrow \quad FT(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \ldots\ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots\ldots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

On appelle <u>fonction de transfert harmonique</u> la valeur prise par la fonction de transfert FT(p) dans le cas particulier où la variable symbolique de Laplace p est un imaginaire pur :

$$\boxed{p = j\omega}$$

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m\, p^m + \ldots\ldots + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + \ldots\ldots + a_1\, p + a_0}$$

$$\Rightarrow \quad FT(j\omega) = \frac{b_m\,(j\omega)^m + \ldots\ldots + b_1\,(j\omega) + b_0}{a_n\,(j\omega)^n + \ldots\ldots + a_1\,(j\omega) + a_0}$$

- ***Le rapport des amplitudes est le module de la fonction de transfert harmonique :***

$$\frac{S_0}{E_0} = \left| FT(j\omega) \right|$$

- ***Le déphasage (retard) de la sortie par rapport à l'entrée est l'argument de la fonction de transfert harmonique :***

$$\varphi = Arg\big(FT(j\omega)\big)$$

2) Lieux (ou diagrammes) de Bode

Les diagrammes de Bode sont une représentation graphique de la fonction de transfert harmonique FT(jω)

Ils sont présentés sur deux courbes distinctes en correspondance verticale :

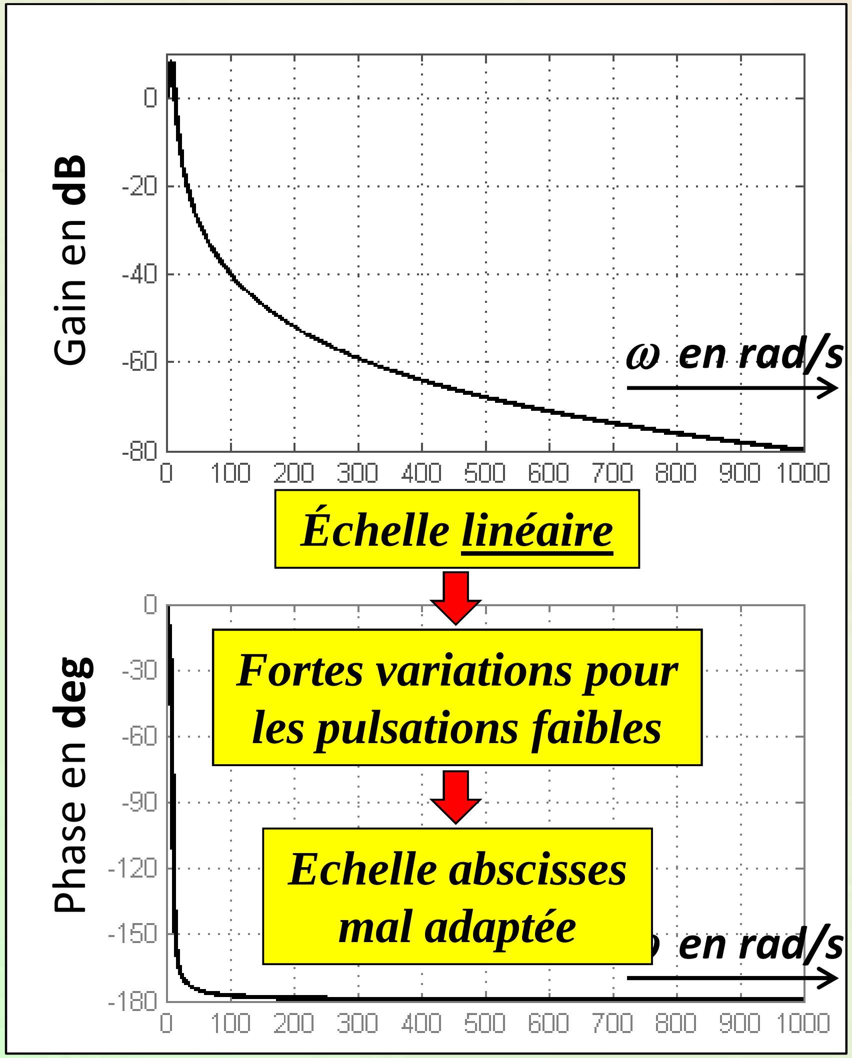
- ***la courbe de gain (en décibel: dB) en fonction de la pulsation ω***

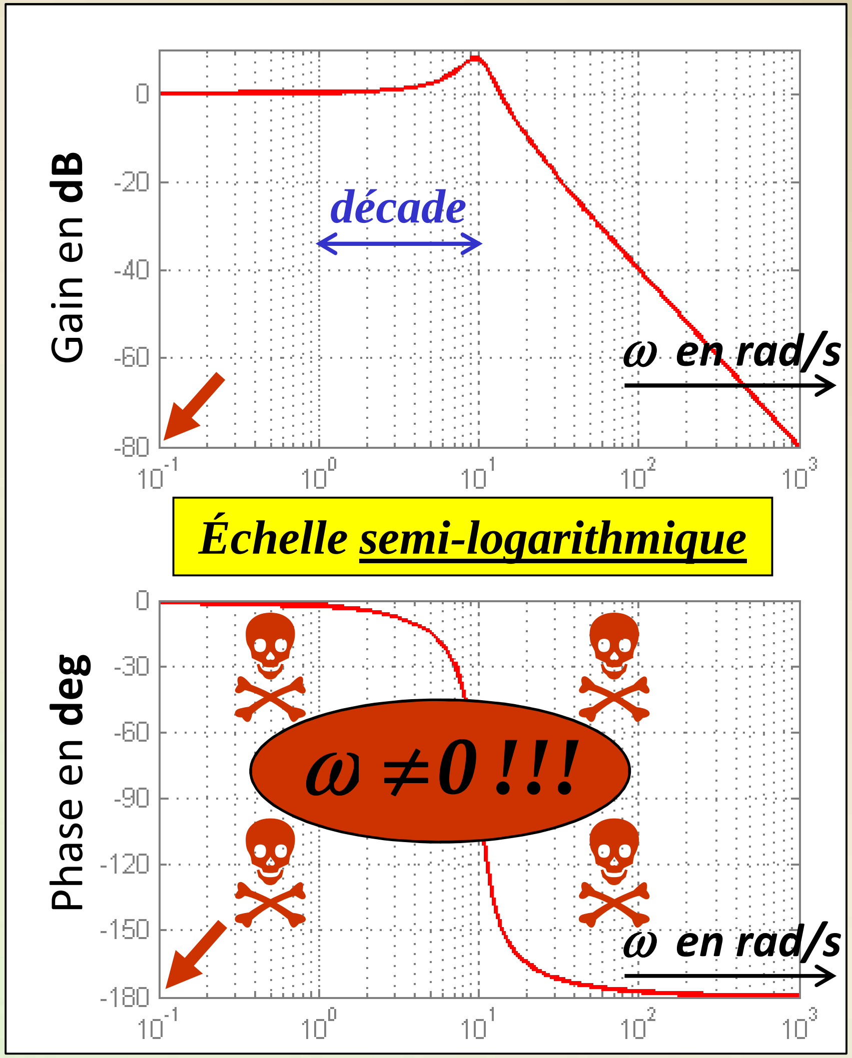
$$\boxed{G_{dB} = 20 \times \log \left| FT(j\omega) \right|}$$

- ***la courbe de phase (en ° ou rad) en fonction de la pulsation ω***

$$\boxed{\varphi = Arg\left(FT(j\omega)\right)}$$

Le diagramme des phases est dessiné dessous celui des gains en correspondance verticale.





Propriétés des lieux (diagrammes) de Bode

Une décade correspond à la multiplication par 10 de la pulsation ω

Une octave correspond à la multiplication par 2 de la pulsation ω

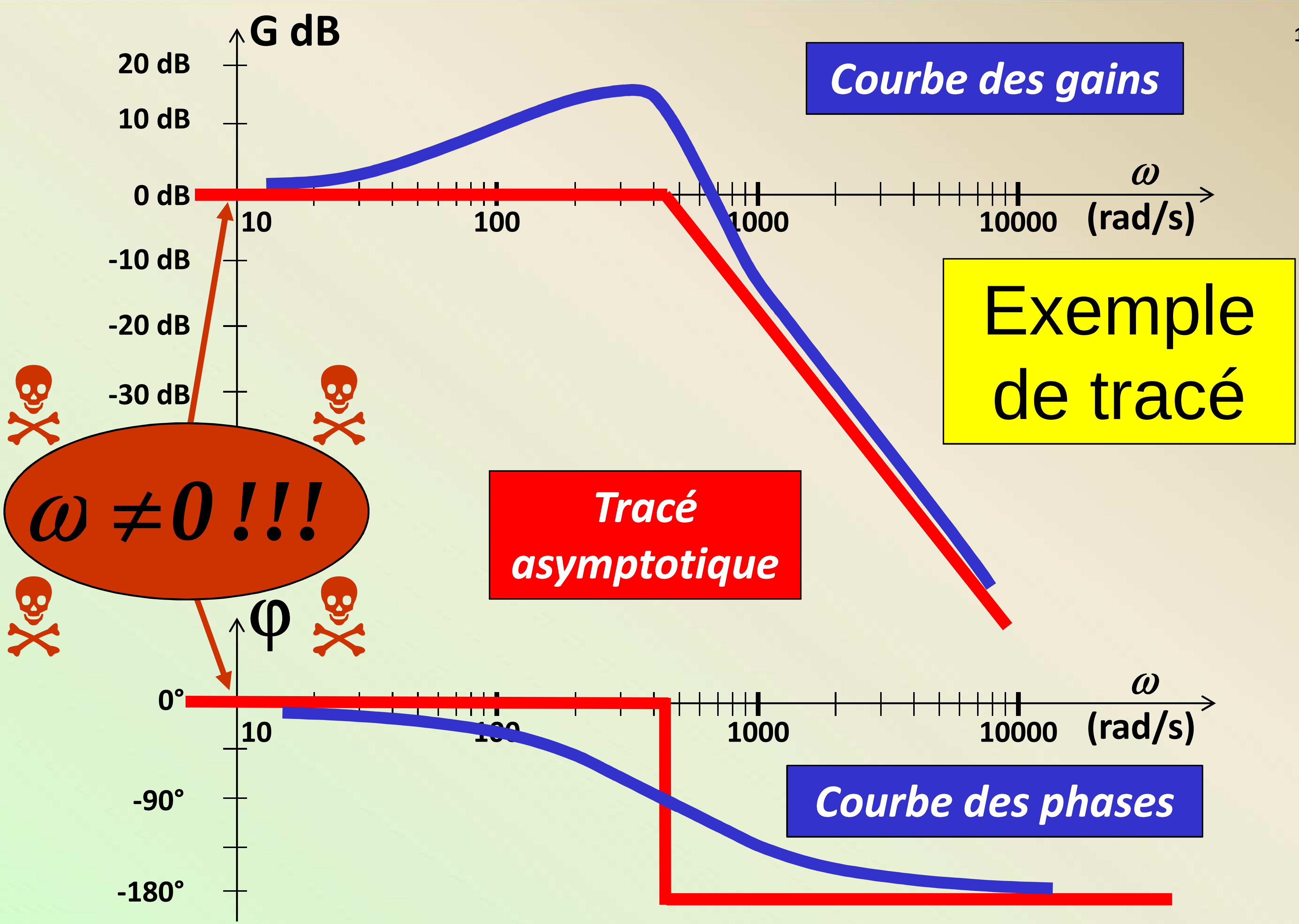
Produit de fonctions de transfert

Supposons que l'on ait : $H(j\omega) = F(j\omega) \times G(j\omega)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\log|H(j\omega)| = 20\log|F(j\omega)\times G(j\omega)| \\ \qquad = 20\log|F(j\omega)| + 20\log|G(j\omega)| \\ Arg\left(H(j\omega)\right) = Arg\left(F(j\omega)\times G(j\omega)\right) \\ \qquad = Arg\left(F(j\omega)\right) + Arg\left(G(j\omega)\right) \end{cases}$$

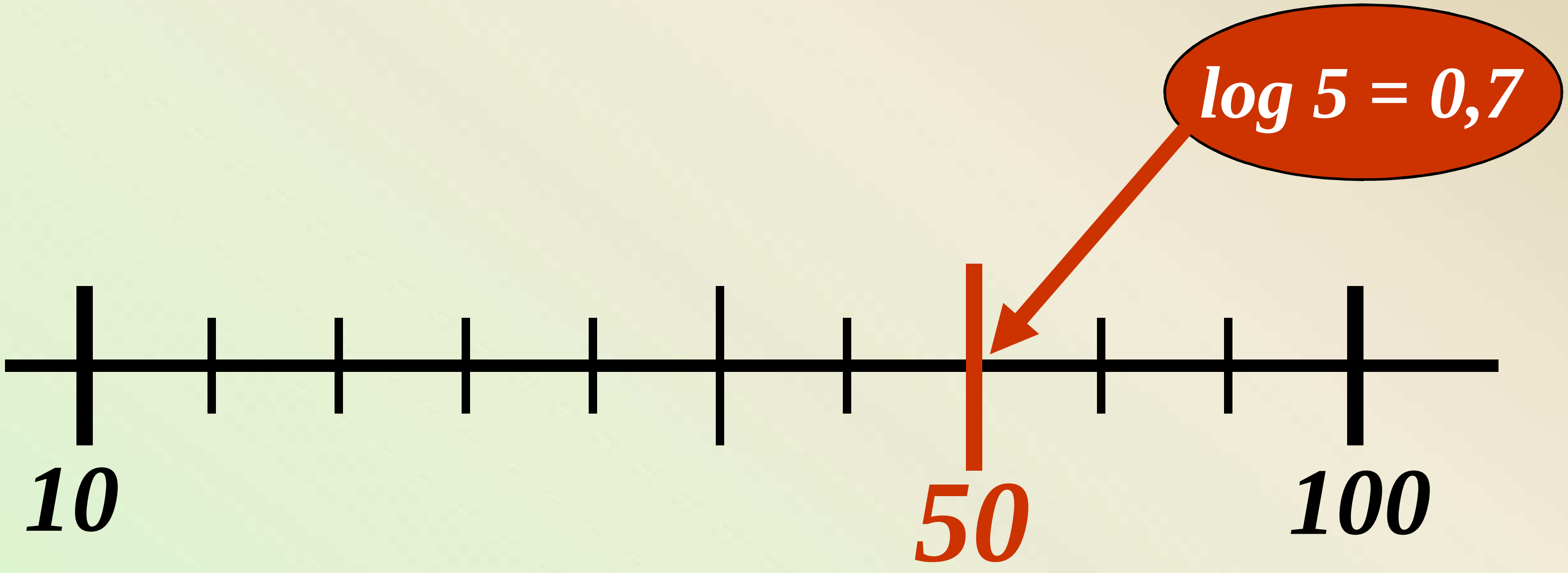
$\Rightarrow$ **Les courbes de gain s'additionnent**

Les courbes de phase s'additionnent


G dB
20 dB
10 dB
0 dB
-10 dB
-20 dB
-30 dB
10
100
1000
10000
ω
(rad/s)
Courbe des gains
Exemple de tracé
$\omega \neq 0$!!!
Tracé asymptotique
φ
0°
-90°
-180°
10
1000
10000
ω
(rad/s)
Courbe des phases

à savoir faire

graduer l'axe horizontal



placer 50 rad/s

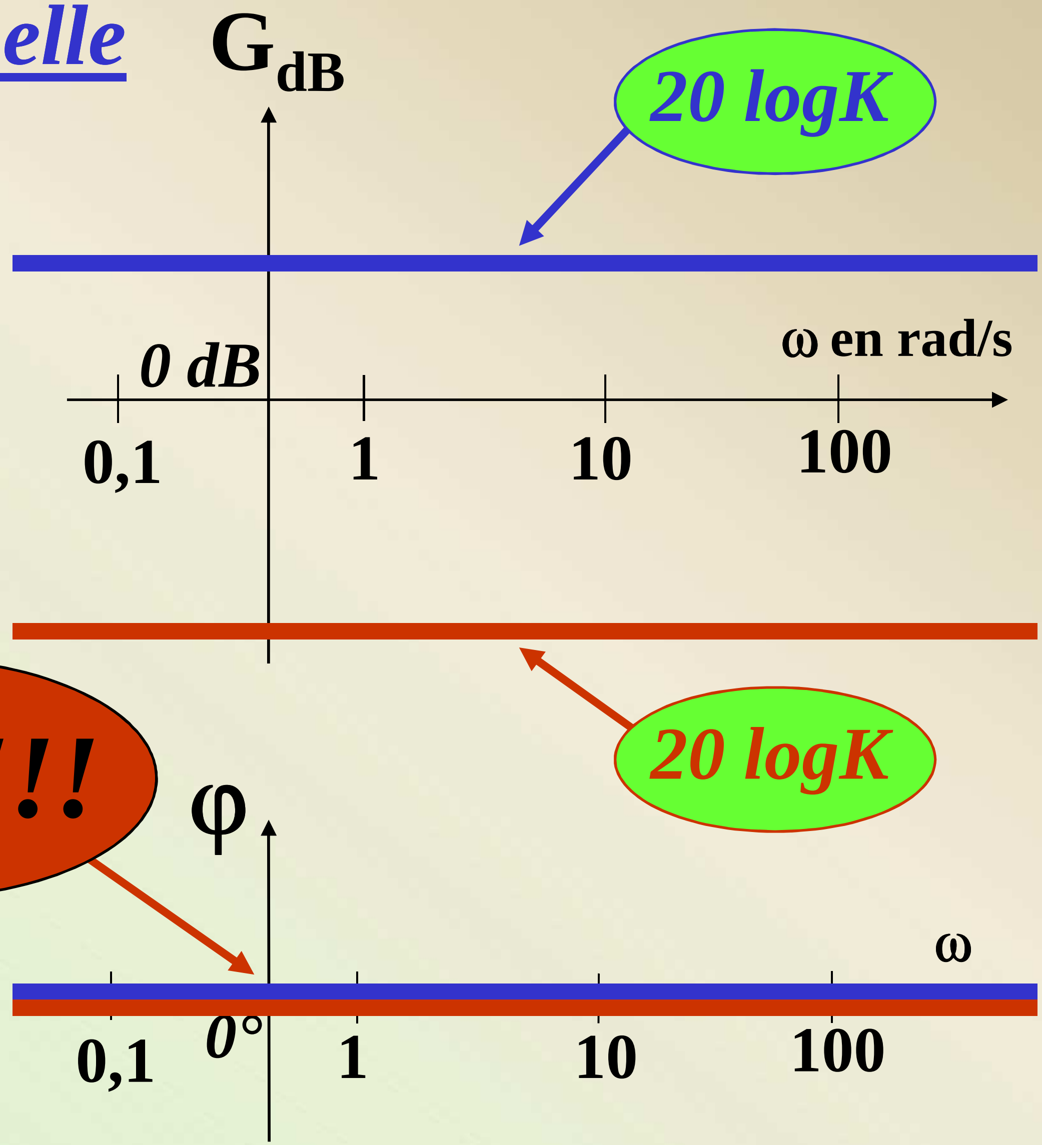
3) Action proportionnelle (gain)

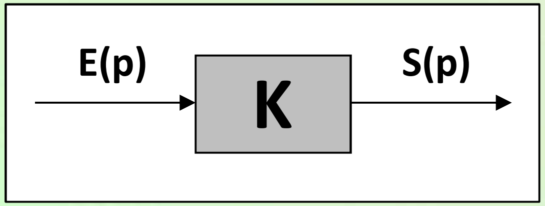
$$FT(p) = K$$

$K > 1$

$K < 1$

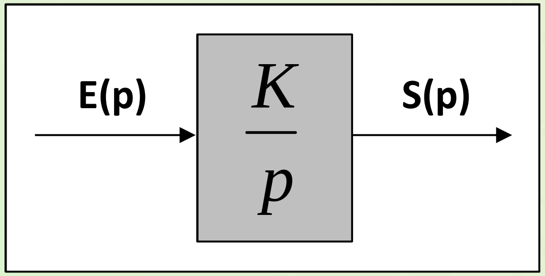
$\omega \neq 0$!!!

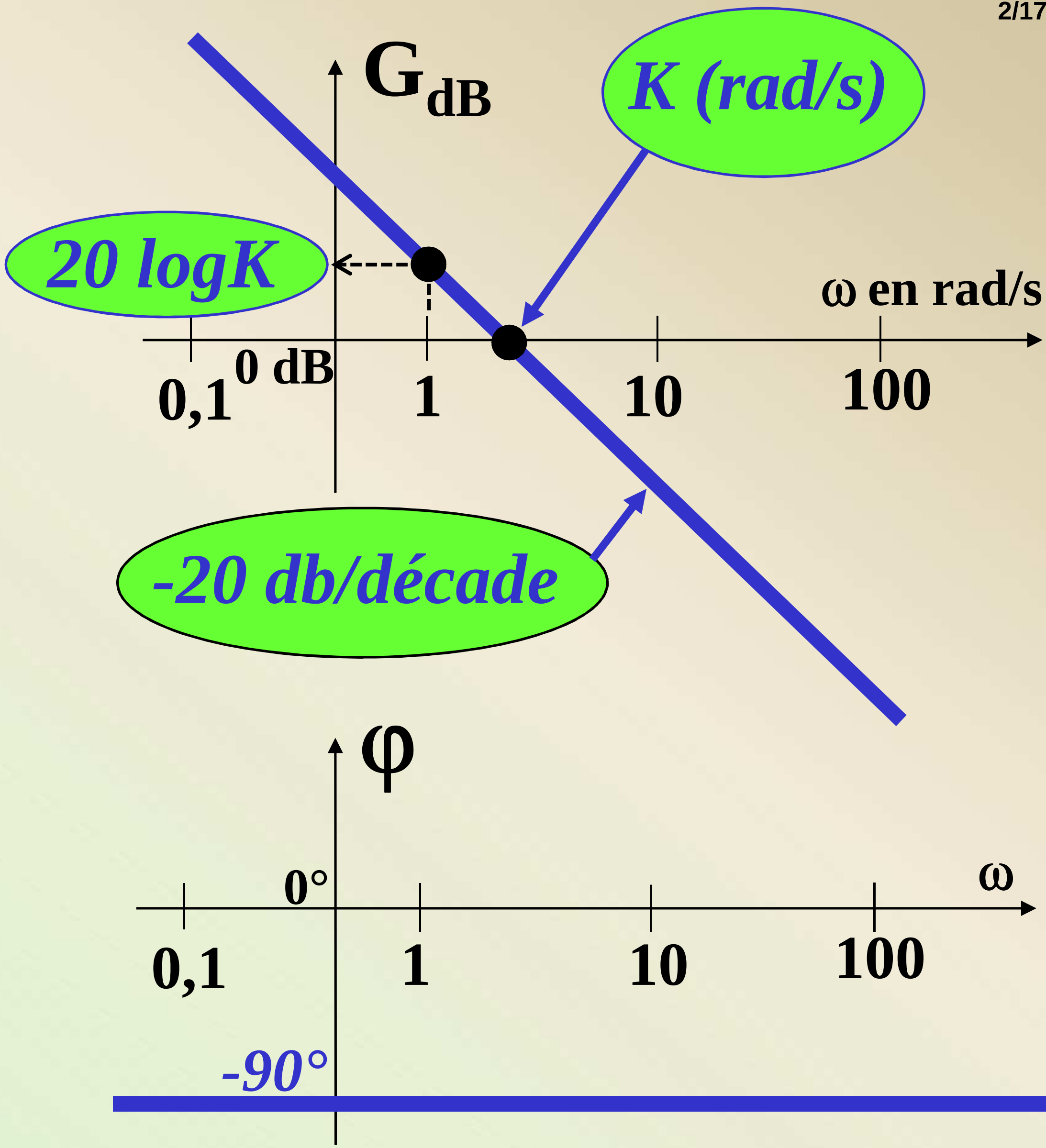




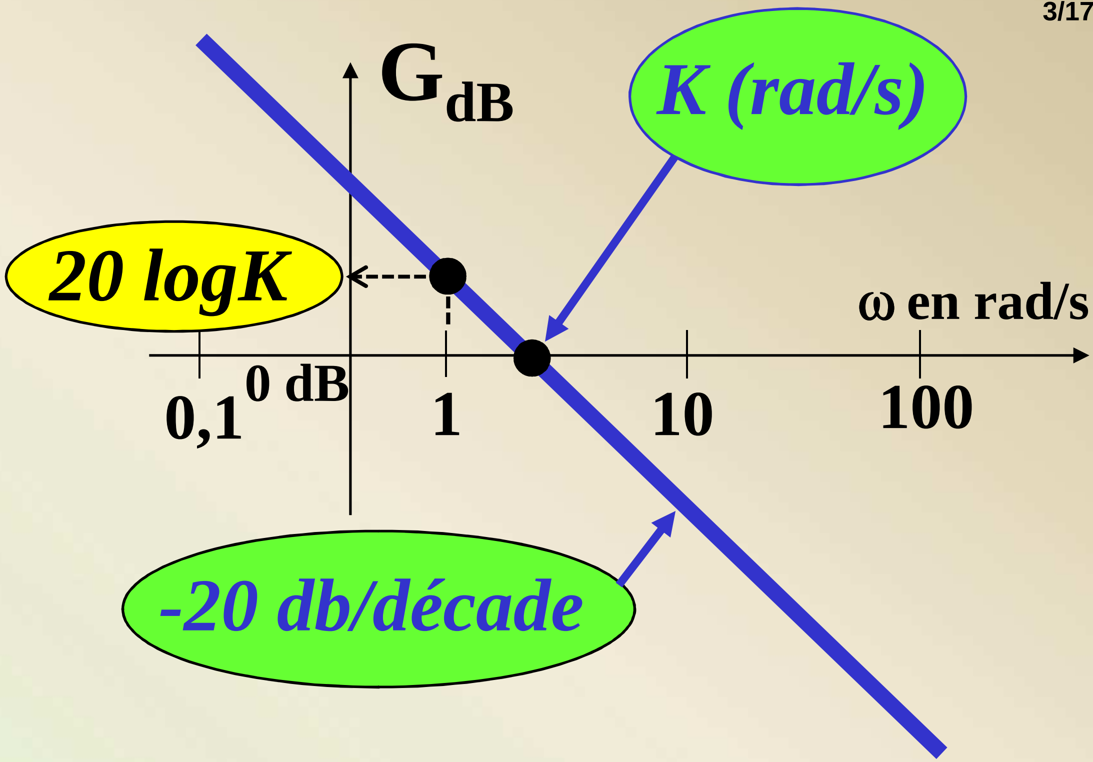
4) Intégrateur

$$FT(p) = \frac{K}{p}$$





$$FT(p) = \frac{K}{p}$$



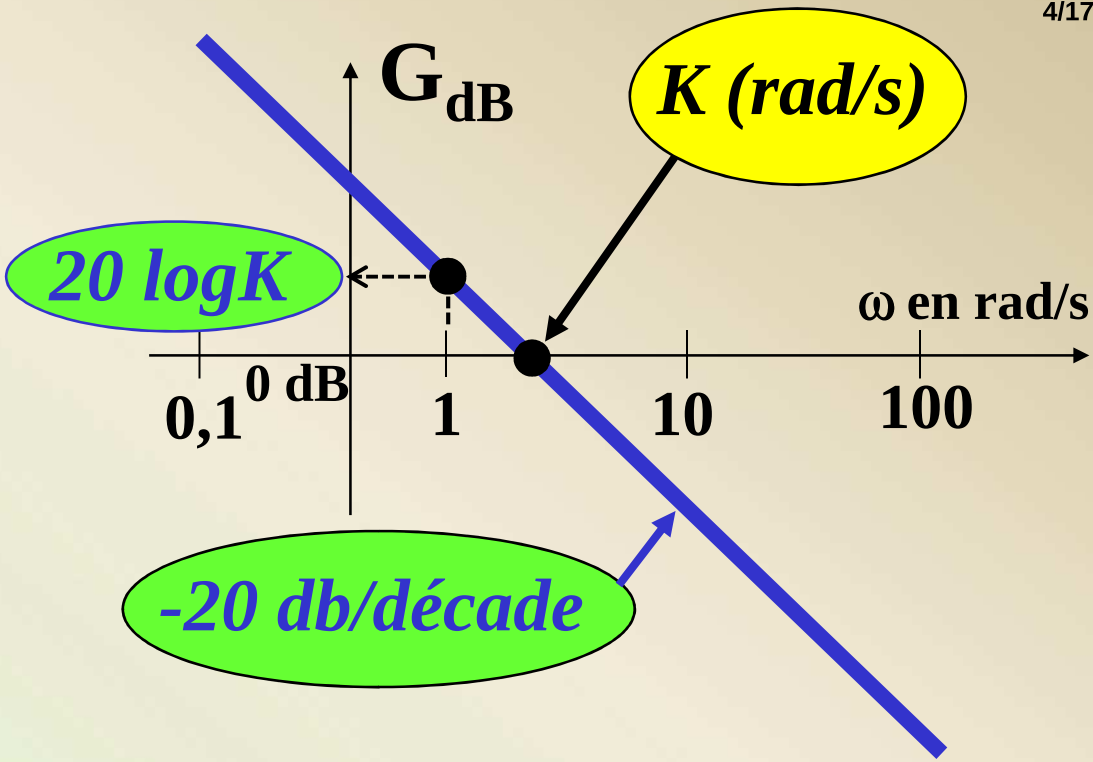
▶ ***Pour ω = 1 rad/s on a :***

$$G_{dB} = 20\log\left|\frac{K}{j\times 1}\right|$$

$$= 20\log\frac{|K|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

➡ $\boxed{G_{dB} = 20\log K}$

$$FT(p) = \frac{K}{p}$$



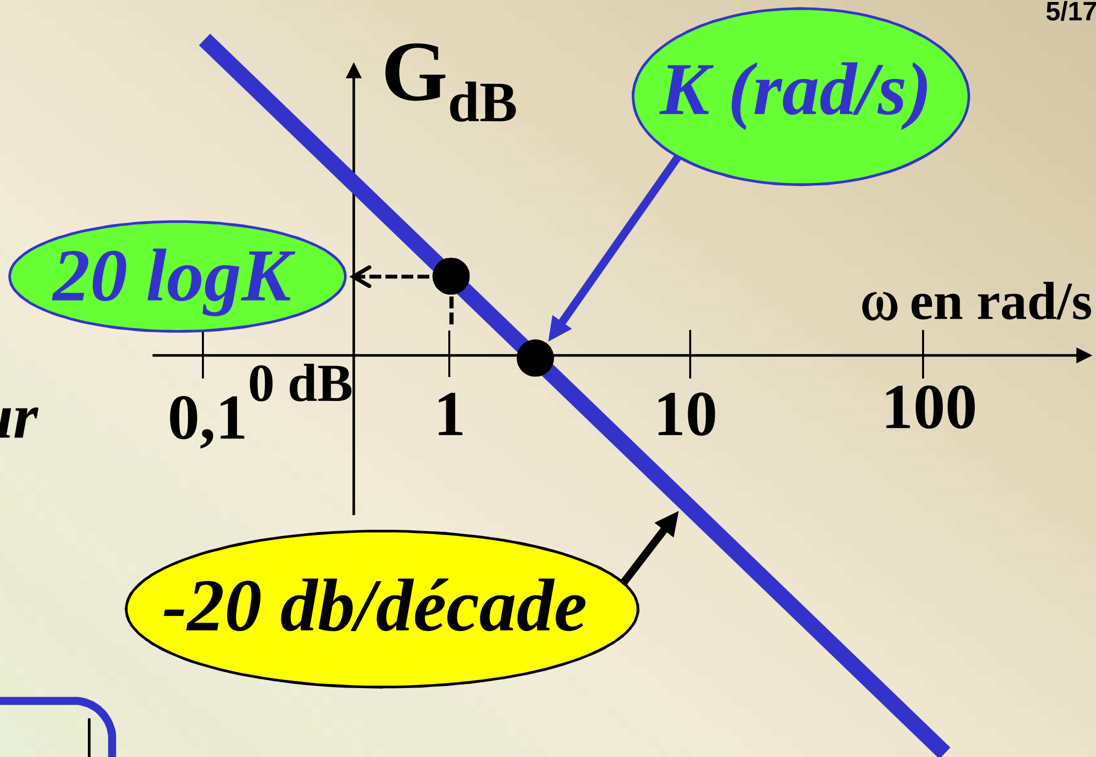
▶ ***Gain nul en dB pour :***

$$20\log\left|\frac{K}{j\omega}\right| = 0\,dB$$

$$\Rightarrow \left|\frac{K}{j\omega}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|K|}{\sqrt{0^2+\omega^2}} = 1 \Rightarrow \frac{K}{\omega} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = K}$$

$$FT(p) = \frac{K}{p}$$



▶ **Pente :** *calculons la valeur pour une décade*

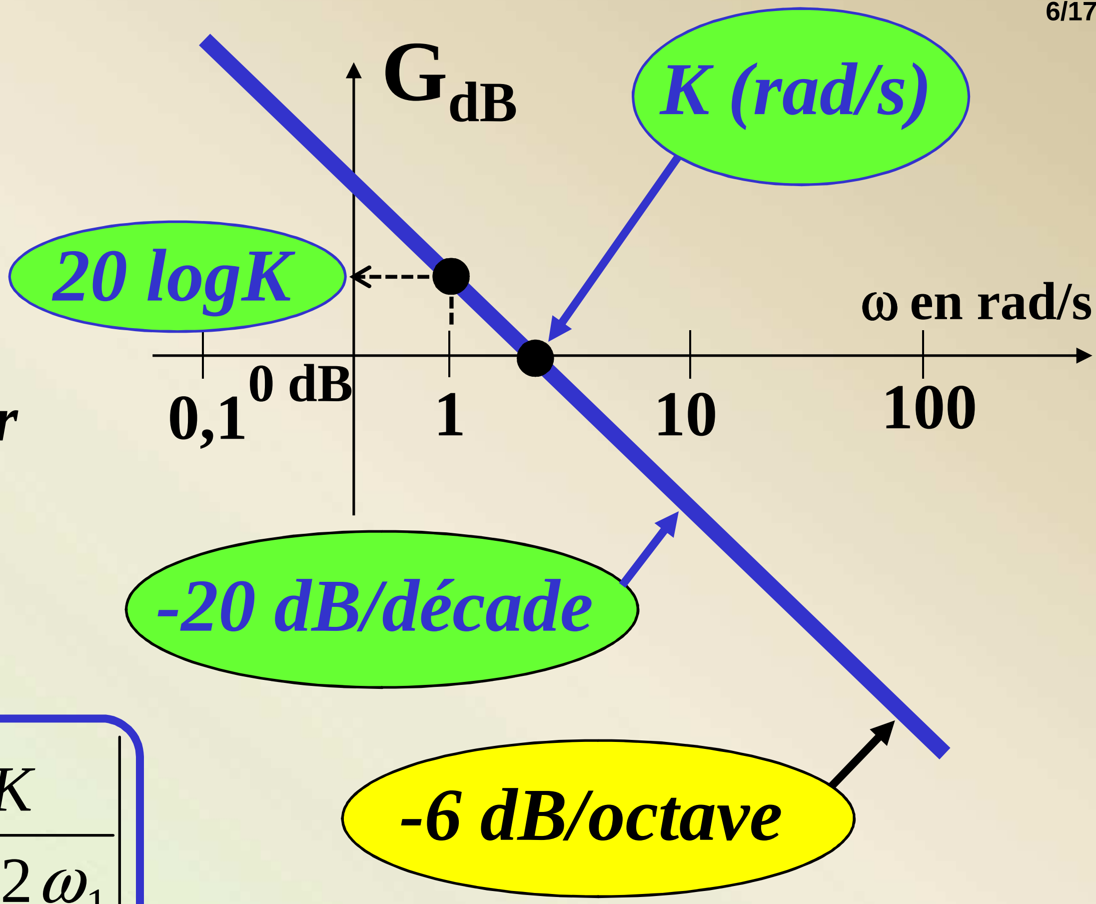
$$G_{\omega=\omega_1} - G_{\omega=10\,\omega_1}$$

$$\Rightarrow \cancel{20\log\left|\frac{K}{j\,\omega_1}\right|}\ \boxed{-20\log\left|\frac{K}{j\times 10\,\omega_1}\right|}$$

$$-20\log\frac{1}{10} - \cancel{20\log\left|\frac{K}{j\,\omega_1}\right|}$$

$$\Rightarrow \quad G_{\omega=\omega_1} - G_{\omega=10\,\omega_1} = 20\,dB$$

$$FT(p) = \frac{K}{p}$$



▶ ***Pente :*** *calculons la valeur pour une octave*

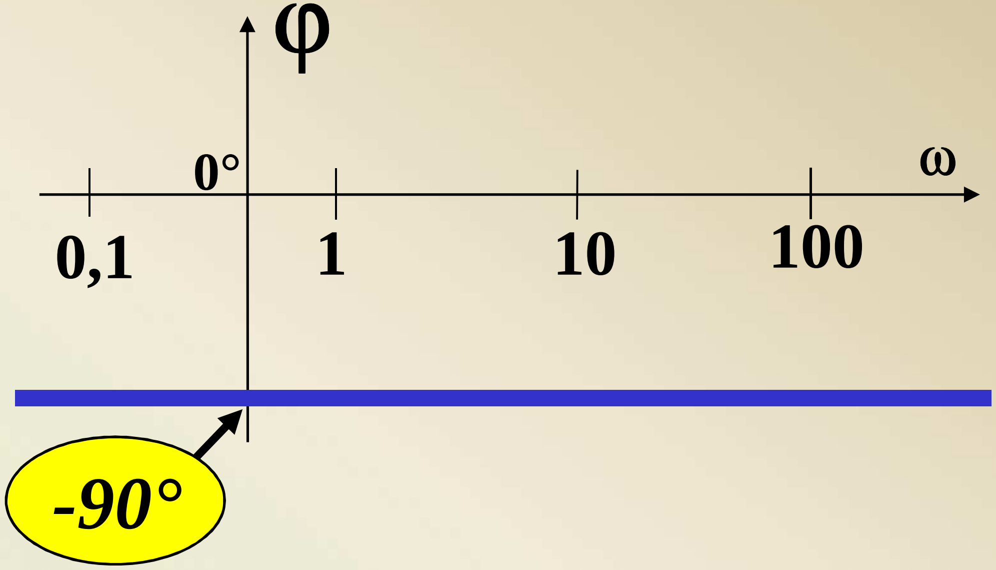
$$G_{\omega=\omega_1} - G_{\omega=2\omega_1}$$

$$\Rightarrow \cancel{20\log\left|\frac{K}{j\omega_1}\right|} \boxed{- 20\log\left|\frac{K}{j\times 2\omega_1}\right|}$$

$$-20\log\frac{1}{2} - \cancel{20\log\left|\frac{K}{j\omega_1}\right|}$$

$$\Rightarrow G_{\omega=\omega_1} - G_{\omega=2\omega_1} \approx 6\,dB$$

$$FT(p) = \frac{K}{p}$$



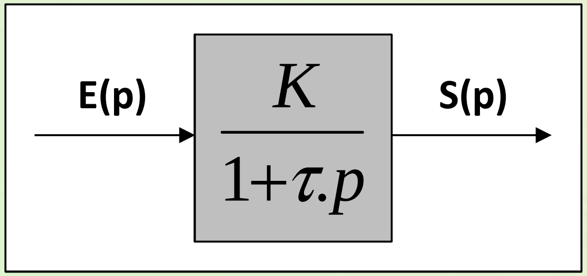
► **Phases:**

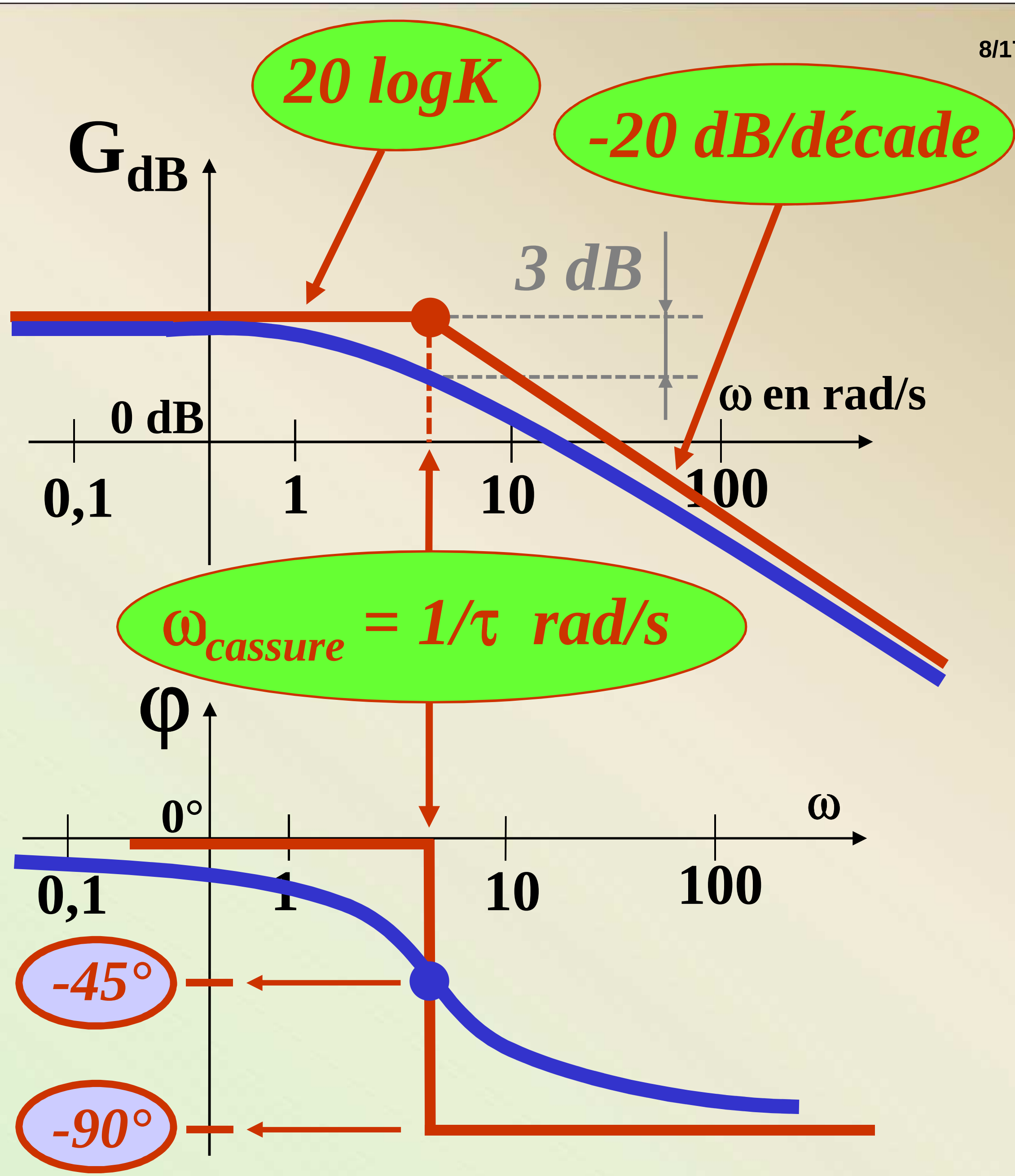
$$Arg\left(\frac{K}{j\,\omega}\right) = Arg(K) - Arg(j\,\omega) = 0 - 90°$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = -90°}$$

5) Premier ordre

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau . p}$$

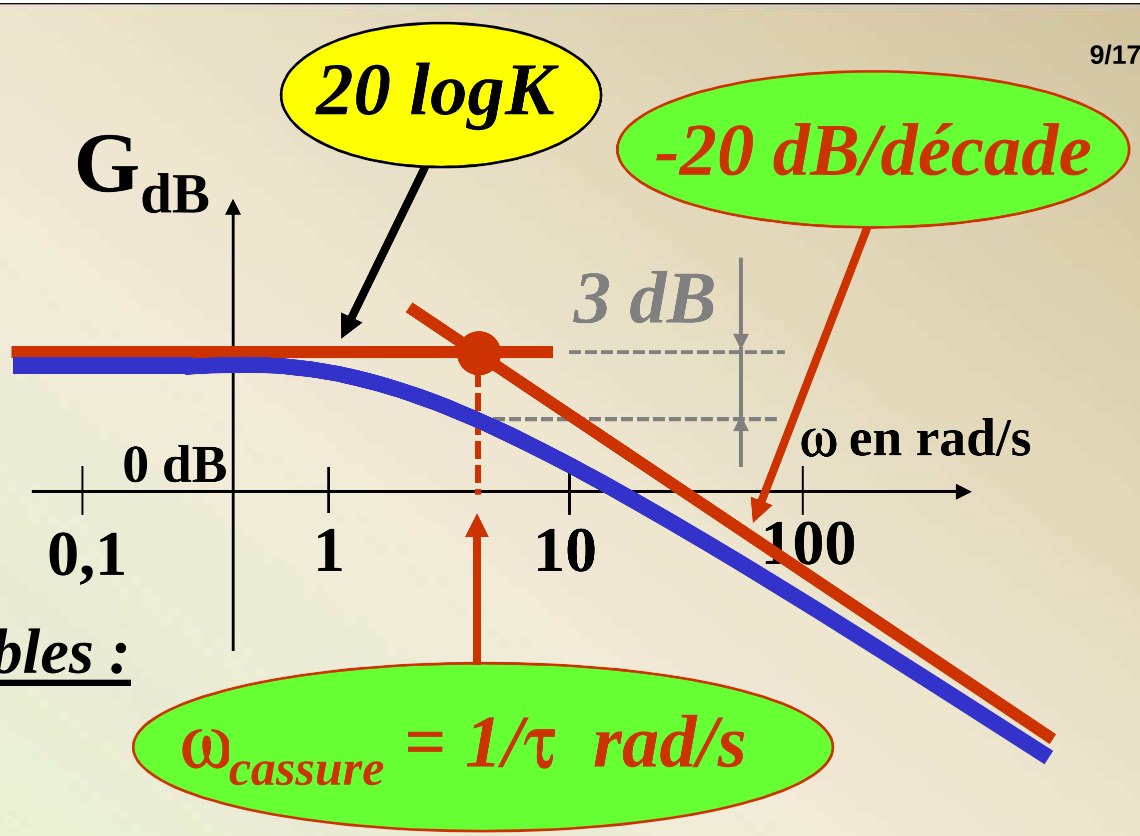




Tracé asymptotique

Courbe réelle

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$



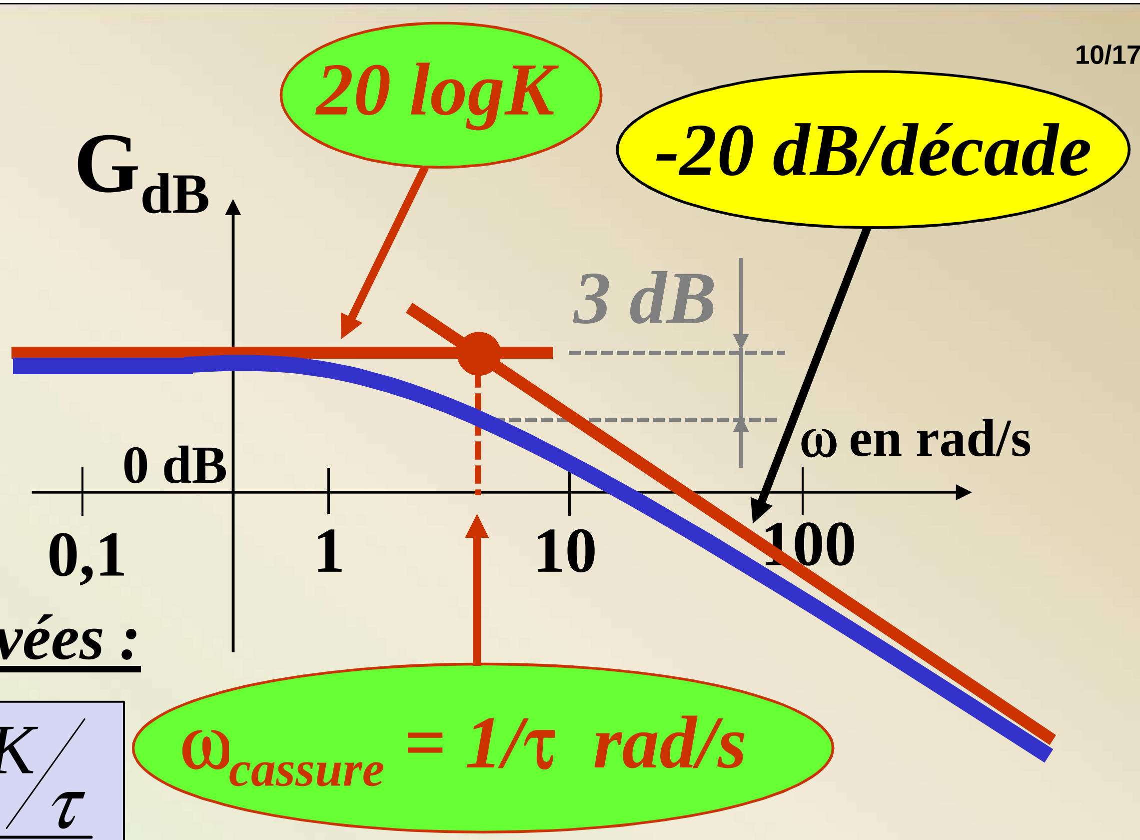
▶ ***Etude aux pulsations faibles :***

Aux basses pulsations on a :

$$\frac{K}{1+\tau\, j\,\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} K$$

➡ ***Pour les pulsations faibles un premier ordre se comporte comme une action proportionnelle***

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$



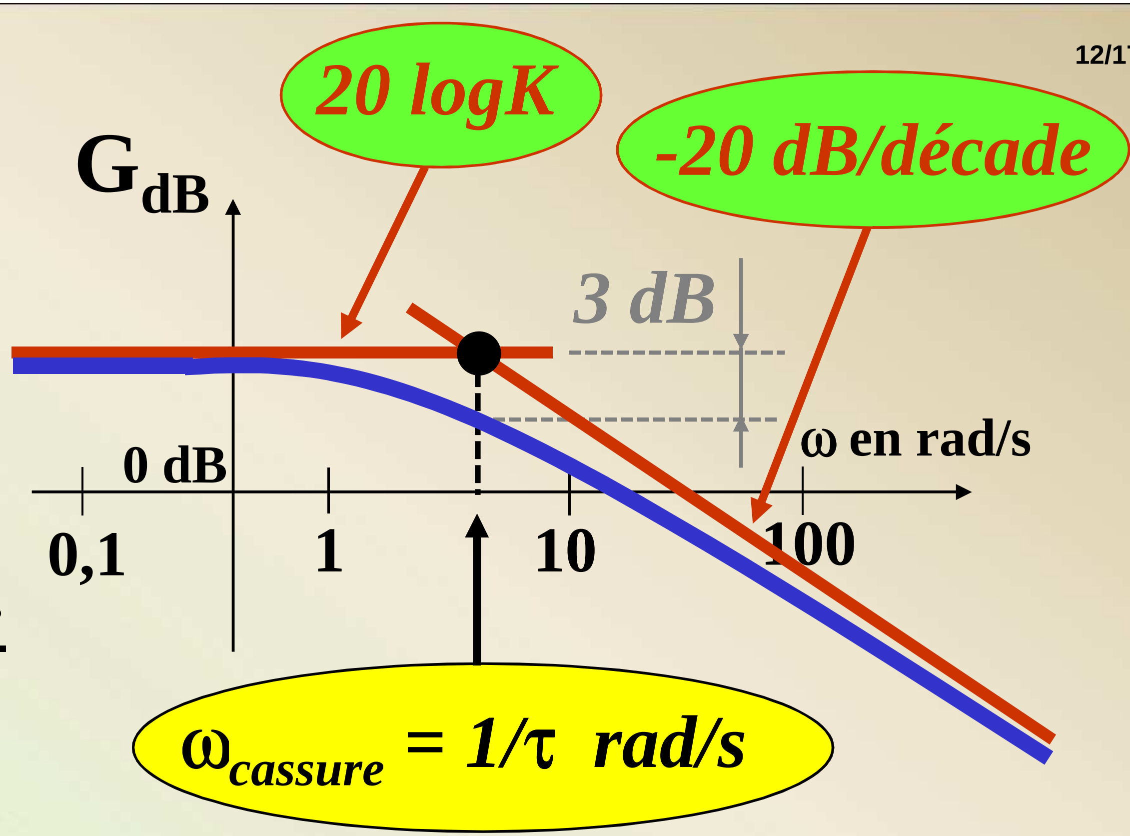
► **Etude aux pulsations élevées :**

Aux grandes pulsations on a : $\dfrac{K/\tau}{j\omega}$

$$\frac{K}{1+\tau j\omega} \xrightarrow[\omega \to "\infty"]{} \frac{K}{\tau j \omega}$$

Pour les pulsations élevées un premier ordre se comporte comme un intégrateur

$$\boxed{FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}}$$



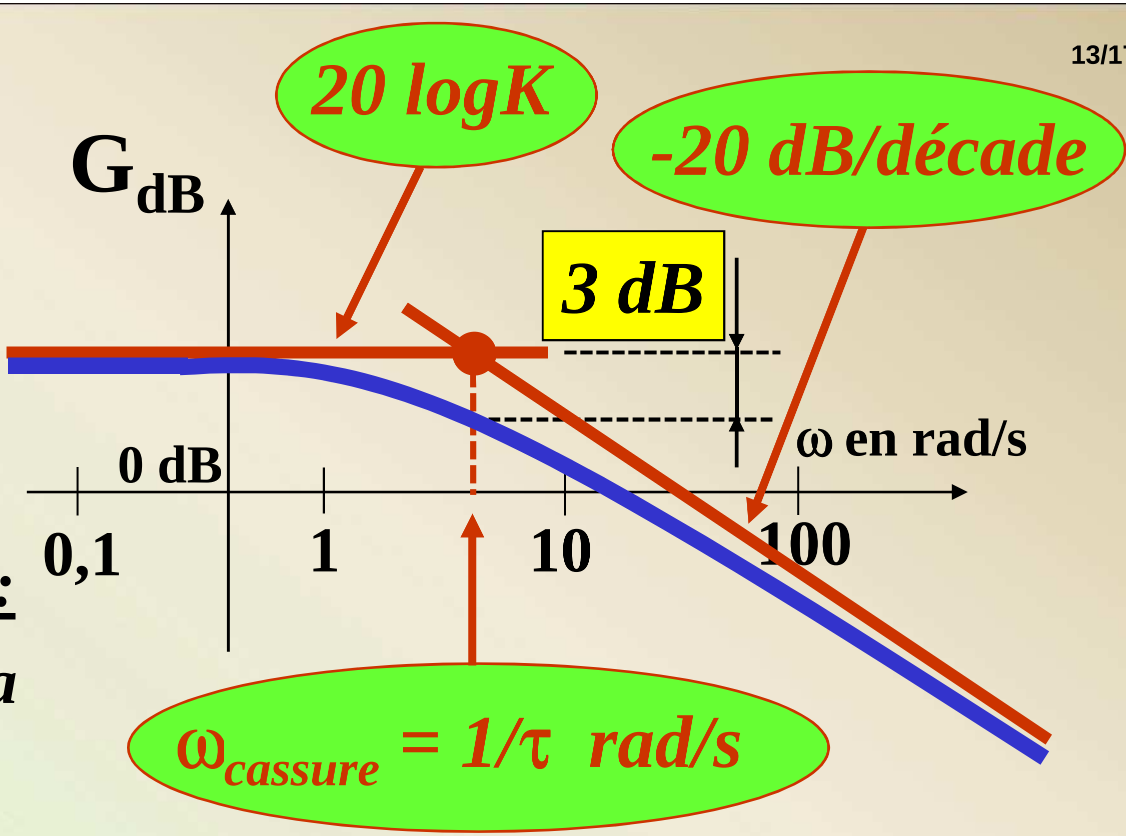
▶ <u>***Cassure des asymptotes :***</u>

La cassure se produit à l'intersection des deux asymptotes soit :

$$\cancel{20\log|K|} = 20\log\left|\frac{K}{\tau\, j\,\omega}\right| \Rightarrow 0 = 20\log\sqrt{0^2+(\tau\,\omega)^2}$$

$$\boxed{\cancel{20\log|K|} - 20\log|\tau\, j\,\omega|} \Rightarrow \tau\,\omega = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}}$$

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$



▶ **_Perte en dB à la cassure :_**

Calculons la valeur de la courbe à la cassure :

$$20\log\left|\frac{K}{1+\tau\, j\,\omega}\right| = 20\log|K| - 20\log|1+j|$$

$$= 20\log K - 20\log\sqrt{1^2+1^2}$$

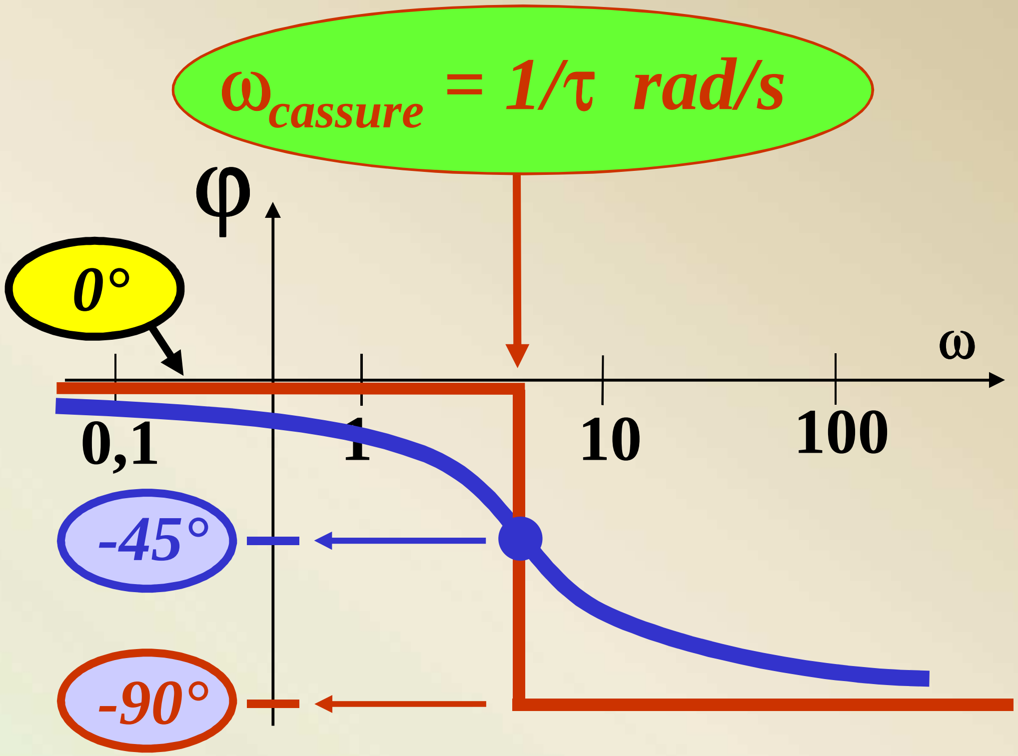
$$= 20\log K - \boxed{20\log\sqrt{2}}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

$$\approx 3\,dB$$

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

▶ ***Etude des phases :***

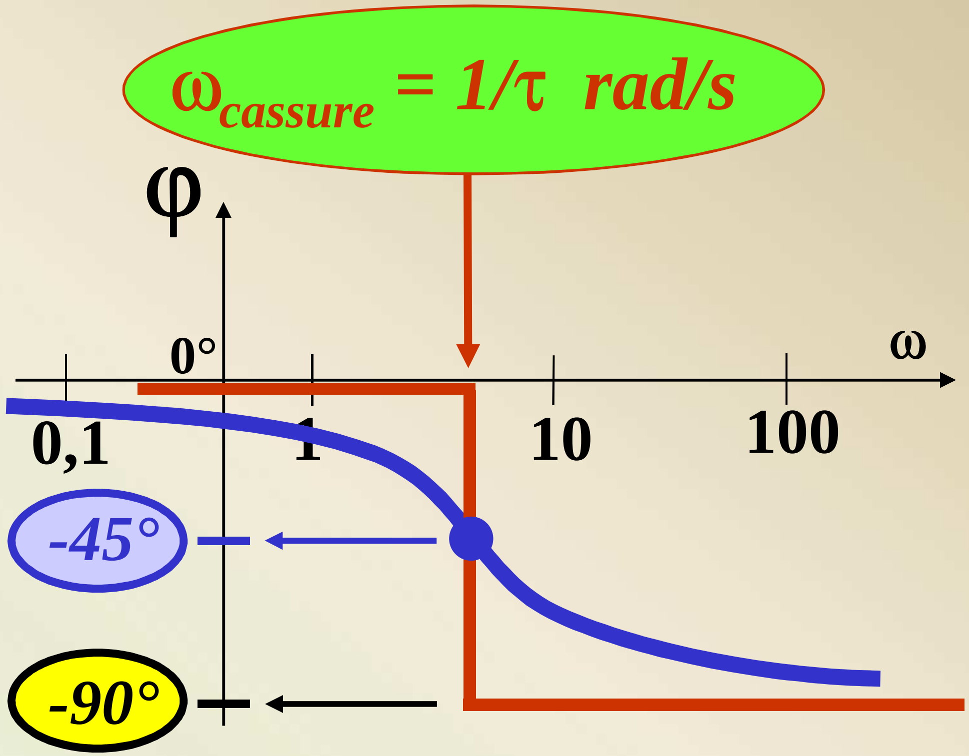


Pour les pulsations faibles un premier ordre se comporte comme une <u>action proportionnelle</u>

➡ ***Asymptote horizontale à 0°***

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

▶ **_Etude des phases :_**



Pour les pulsations élevées un premier ordre se comporte comme un <u>intégrateur</u>

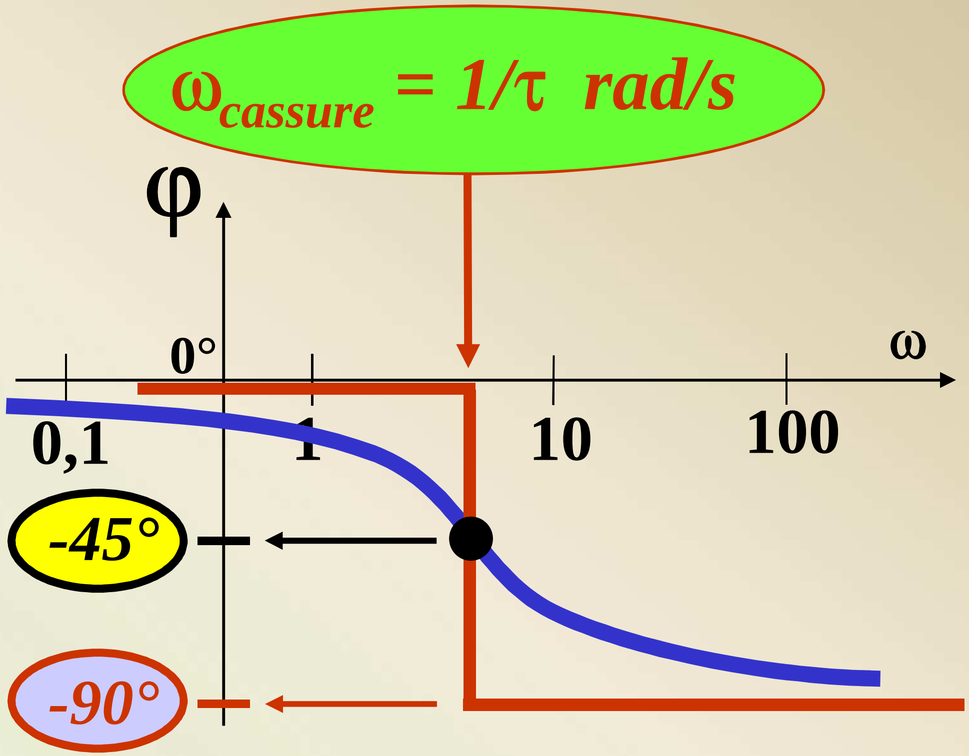
Asymptote horizontale à -90°

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

- **Etude des phases :**

Point particulier

Calculons la valeur de la courbe à la cassure :



$$\varphi = Arg\left(\frac{K}{1+\tau\, j\,\omega}\right) = \cancel{Arg\,K} - Arg\left(1+j\right) = -Arc\tan\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

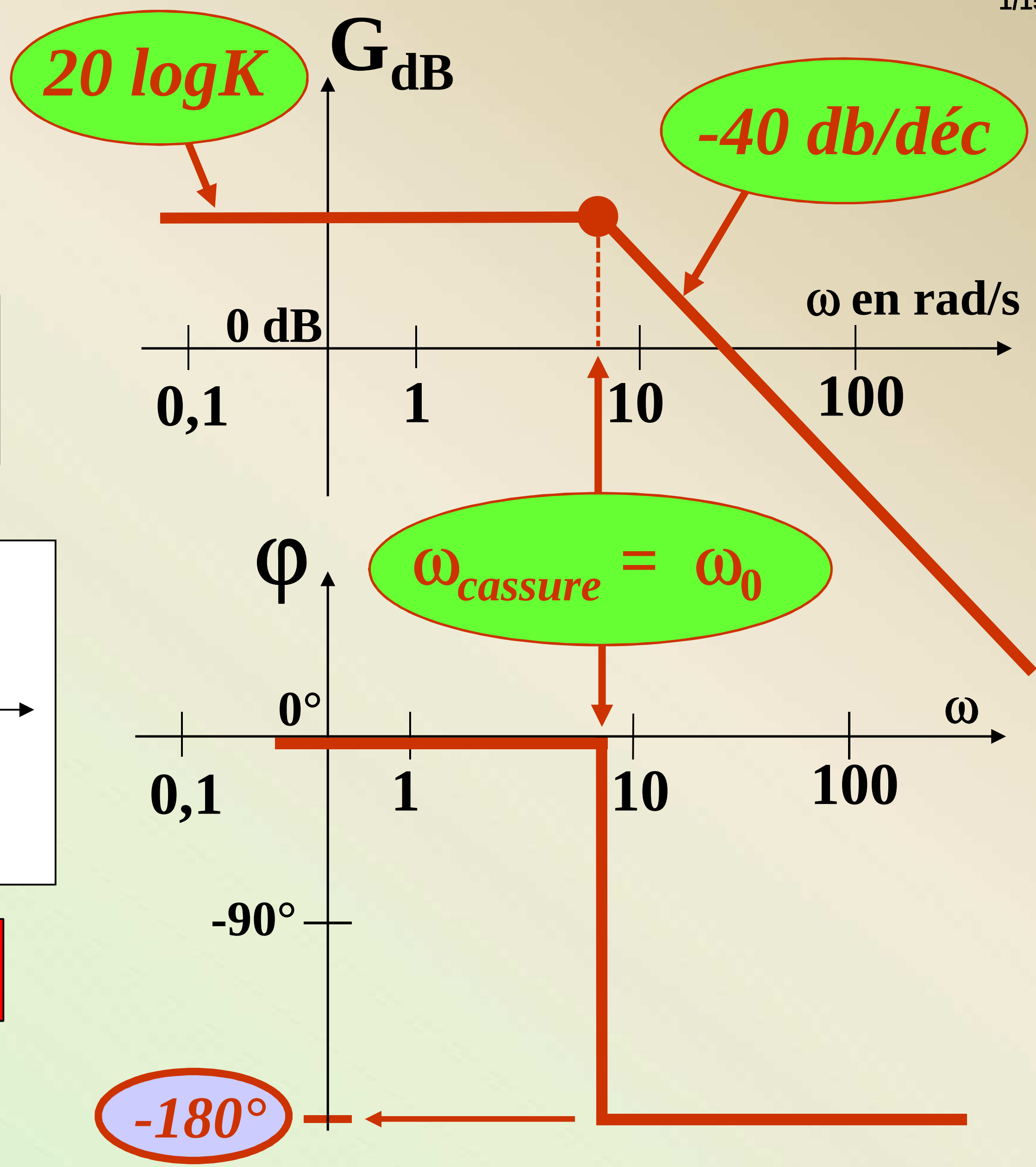
$$\boxed{\varphi = -45°}$$

6) Deuxième ordre

$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$

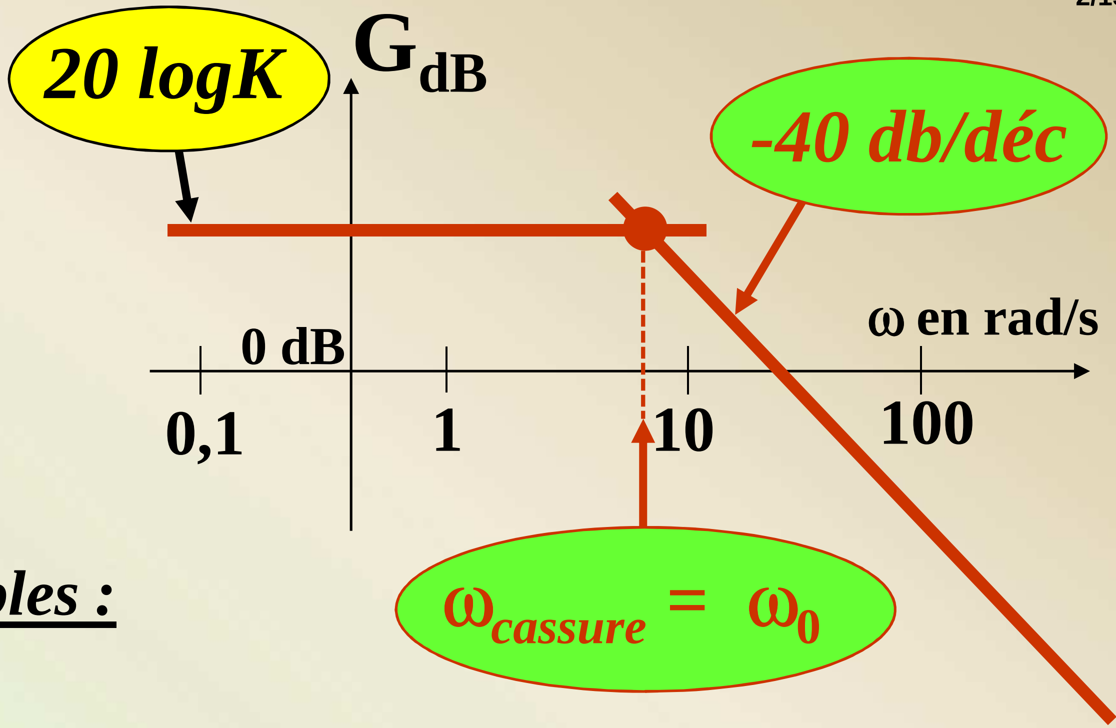
$$E(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{K}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}} \longrightarrow S(p)$$

Tracé asymptotique



Tracé asymptotique

$$FT(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$



▶ Etude aux pulsations faibles :

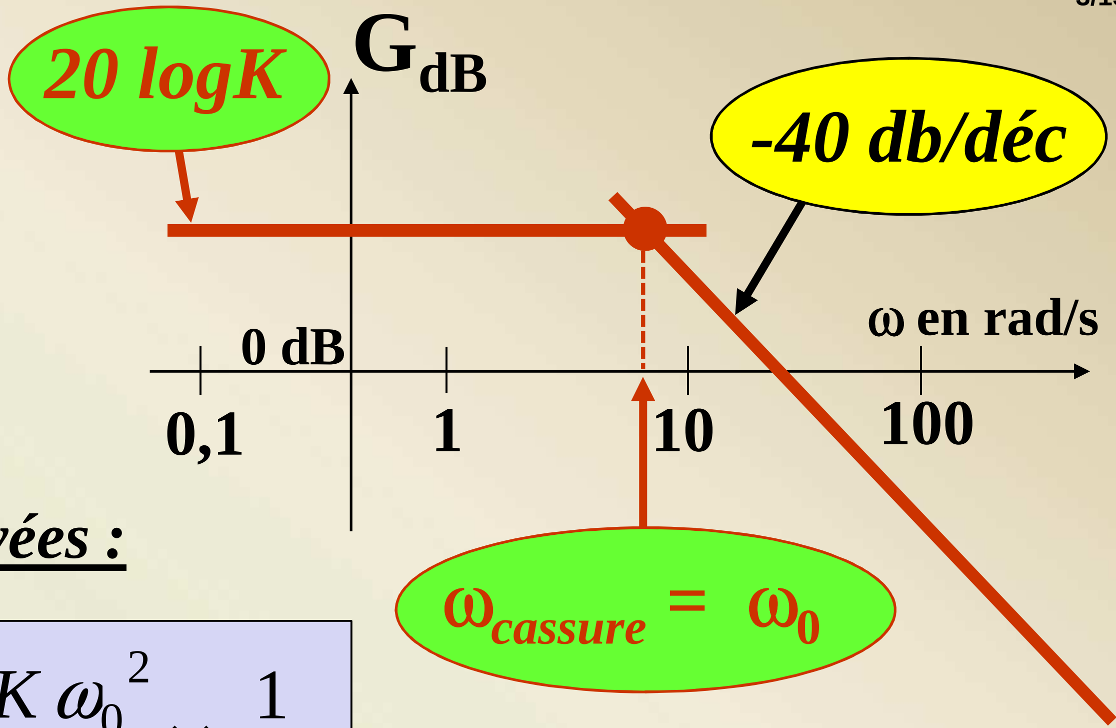
Aux basses pulsations on a :

$$\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.j\omega+\frac{1}{\omega_0^2}.(j\omega)^2} \xrightarrow[\omega \to 0]{} K$$

Pour les pulsations faibles un deuxième ordre se comporte comme une <u>action proportionnelle</u>

Tracé asymptotique

$$FT(p) = \frac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}.p+\dfrac{1}{\omega_0^{\ 2}}.p^2}$$



▶ *Etude aux pulsations élevées :*

Aux grandes pulsations on a :

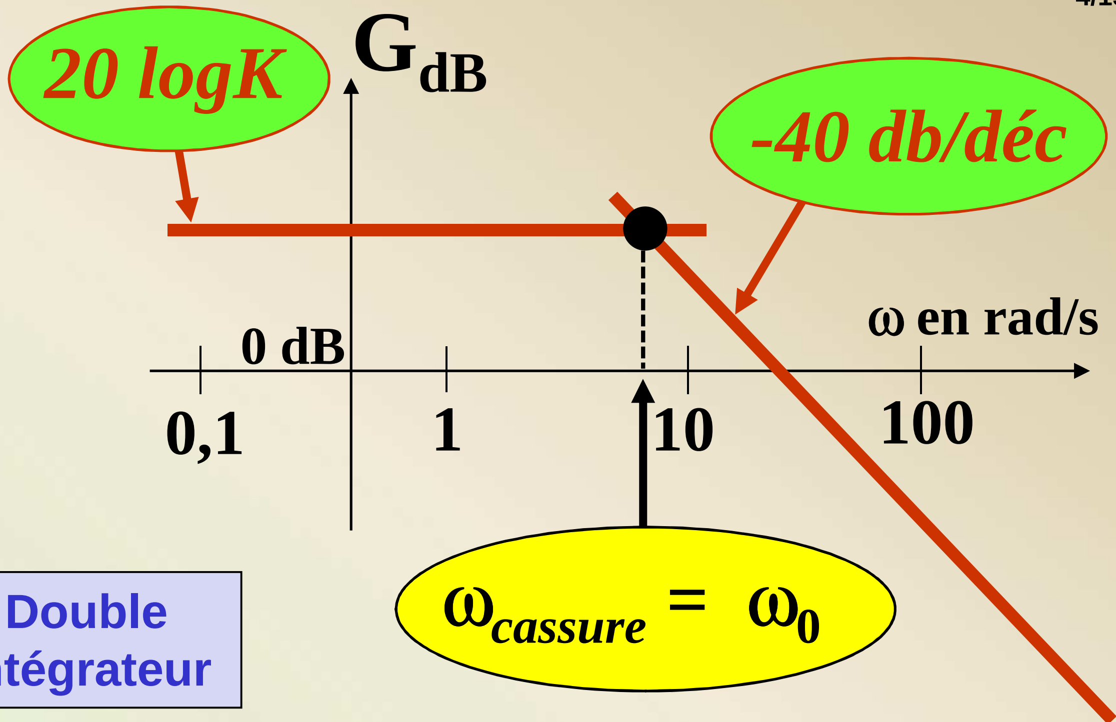
$$\frac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}.j\omega+\dfrac{1}{\omega_0^{\ 2}}.(j\omega)^2} \xrightarrow[\omega \to "\infty"]{} \frac{K}{\dfrac{1}{\omega_0^{\ 2}}(j\omega)^2}$$

$$\frac{K\,\omega_0^{\ 2}}{j\omega} \times \frac{1}{j\omega}$$

Pour les pulsations élevées un deuxième ordre se comporte comme un <u>double intégrateur</u>

Tracé asymptotique

$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^{\,2}}.p^2}$$



▶ Cassure des asymptotes :

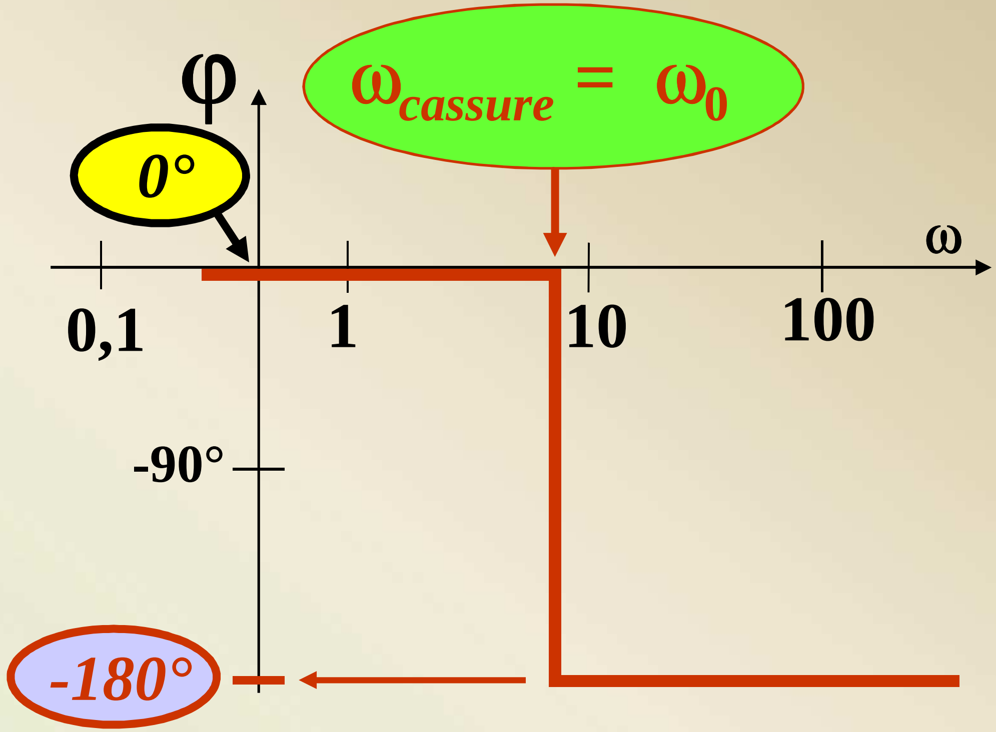
La cassure se produit à l'intersection des deux asymptotes soit :

$$\cancel{20\log}|K| = 20\log\left|\underbrace{K \times \left(\frac{\omega_0}{j\,\omega}\right)^2}_{\text{Double intégrateur}}\right| = \cancel{20\,log}|K| + 2\times 20\,log\left|\frac{\omega_0}{j\,\omega}\right|$$

$$\frac{|\omega_0|}{\sqrt{0^2 + (\omega)^2}} = 1 \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega} = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_{cassure} = \omega_0}$$

Tracé asymptotique

$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$



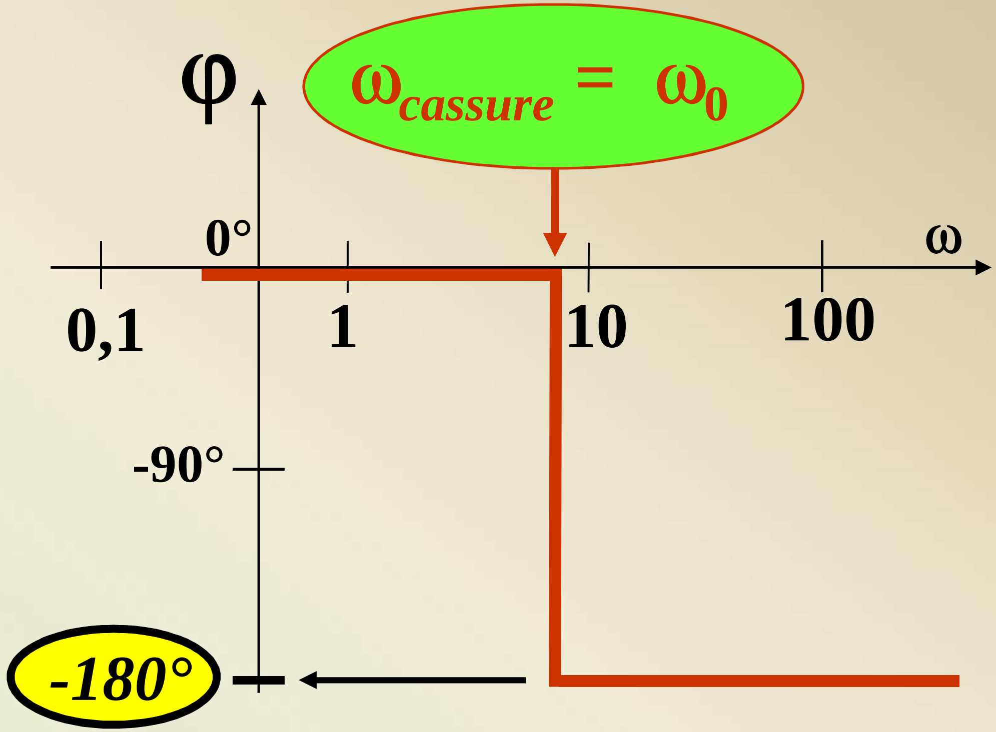
▶ ***Etude des phases :***

Pour les pulsations faibles un deuxième ordre se comporte comme une action proportionnelle

➡ ***Asymptote horizontale à 0°***

Tracé asymptotique

$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$



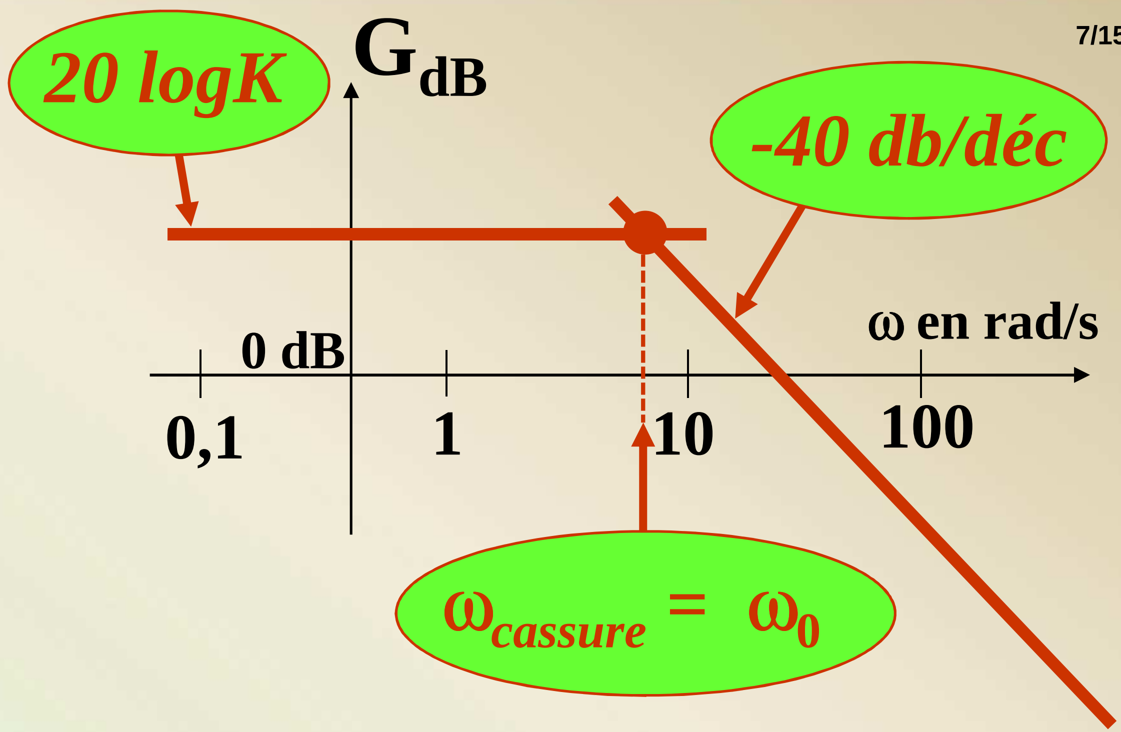
▶ ***Etude des phases :***

Pour les pulsations élevées un deuxième ordre se comporte comme un double intégrateur

Asymptote horizontale à -180°

Tracé réel

$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^{\,2}}.p^2}$$

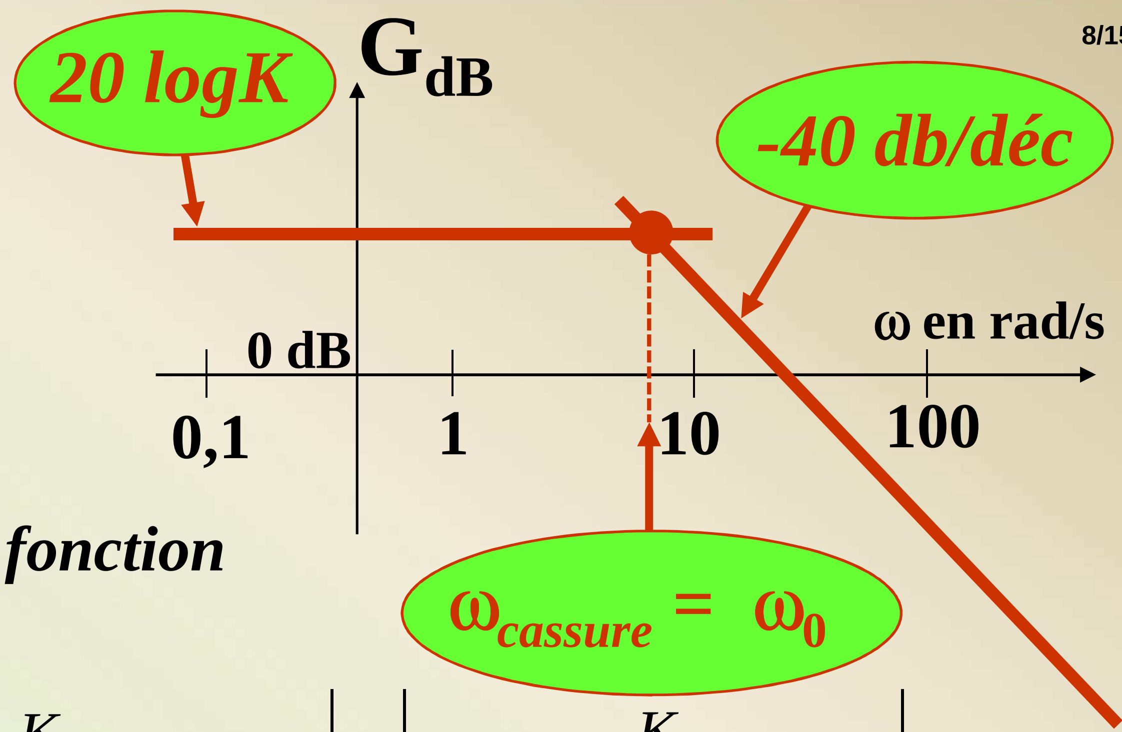


La courbe réelle va s'appuyer sur les asymptotes

dessus ou dessous ?

Tracé réel

$$FT(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^{2}}.p^2}$$



Calculons le module de la fonction de transfert harmonique :

$$|FT(j\omega)|=\left|\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.(j\omega)+\frac{1}{\omega_0^{2}}.(j\omega)^2}\right|=\left|\frac{K}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\times\frac{2z\omega}{\omega_0}}\right|$$

$$=\frac{|K|}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4z^2\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4-2\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+4z^2\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\left|FT(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 2\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 4z^2\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Cette fonction présente un extrémum si sa dérivée s'annule.

On sait que :

$$\left(\frac{\overset{K}{f(x)}}{g(x)}\right)' = \frac{\overset{0}{f'(x)}\times g(x) - \overset{K}{f(x)}\times g'(x)}{g(x)^2}$$

$$g(x) = \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(4z^2-2\right)\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

donc $\left|FT(j\omega)\right|' = -\frac{K\times g'(x)}{g(x)^2}$

cette dérivée s'annule lorsque g'(x) s'annule.

$\boxed{g'(x) = 0}$ $\Rightarrow$ $$\left(\sqrt{\underbrace{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4+\left(4z^2-2\right)\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}_{h(x)}}\right)' = 0$$

On sait que $\left(\sqrt{h(x)}\right)' = \frac{1}{2}\times h'(x)\times h(x)^{-\frac{1}{2}}$ *qui s'annule quand* $h'(x) = 0$

$$\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4+\left(4z^2-2\right)\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)' = 0$$

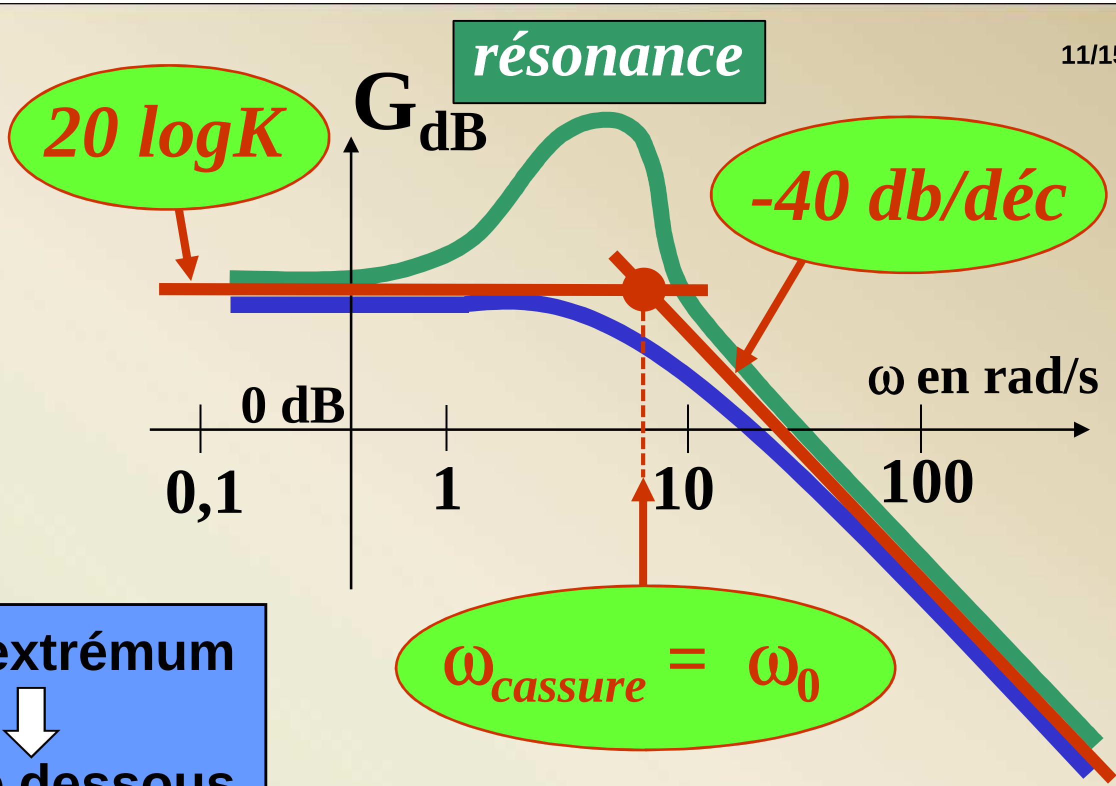
$$0+\frac{1}{\omega_0{}^4}\times 4\omega^3+\frac{4z^2-2}{\omega_0{}^2}\times 2\omega = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0{}^2}\times\left[4\times\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(2z^2-1\right)\times 4\right] = 0$$

Expression qui ne peut s'annuler (en dehors de $\omega = 0$) que si :

$$2z^2-1<0 \Rightarrow z<\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{z<\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Tracé réel courbe des gains

$$FT(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$

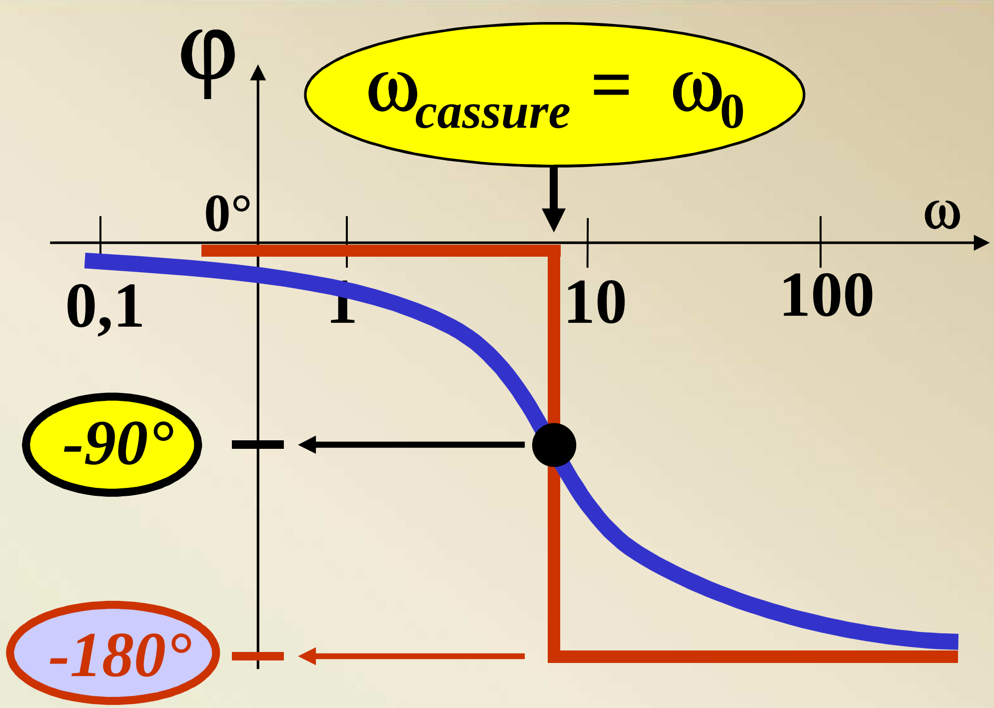


$z \rangle \frac{\sqrt{2}}{2}$ → pas d'extrémum ⇓ courbe <u>dessous</u> les asymptotes

$z \langle \frac{\sqrt{2}}{2}$ → extrémum ⇓ courbe <u>dessus</u> les asymptotes → ***<u>résonance</u>***

Tracé réel courbe des phases

$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}.p^2}$$



La courbe « s'appuie » sur les asymptotes avec une <u>symétrie</u>

Pour : $\omega = \omega_0$

$$Arg\left(FT(j\omega_0)\right) = Arg\left[\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.j\omega_0 + \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}.(j\omega_0)^2}\right]$$

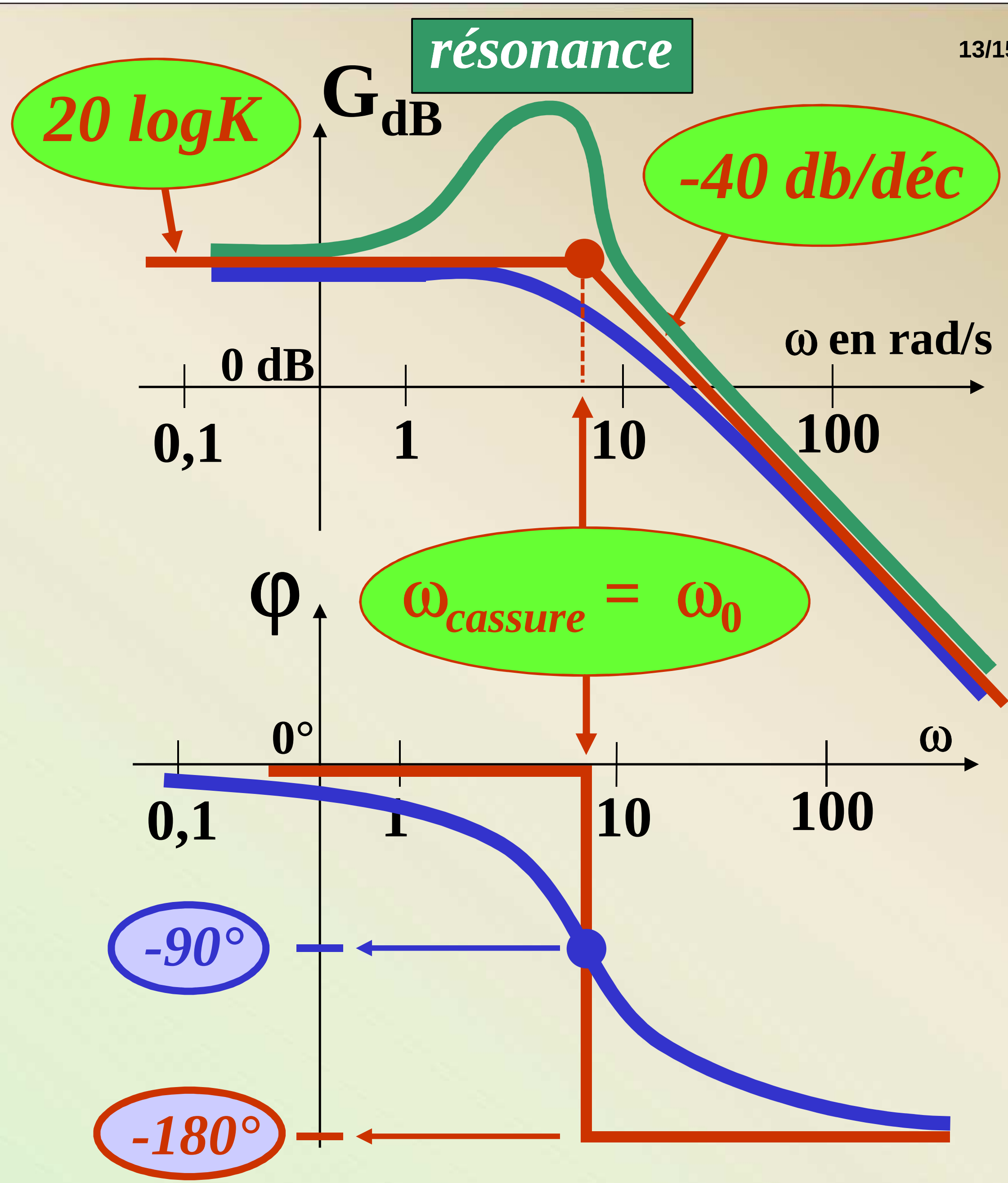
$$= \cancel{Arg(K)} - Arg\left(1 + 2z\,j - 1\right) \quad - Arg\left(2z\,j\right) \Rightarrow \boxed{\varphi = -90°}$$

Synthèse

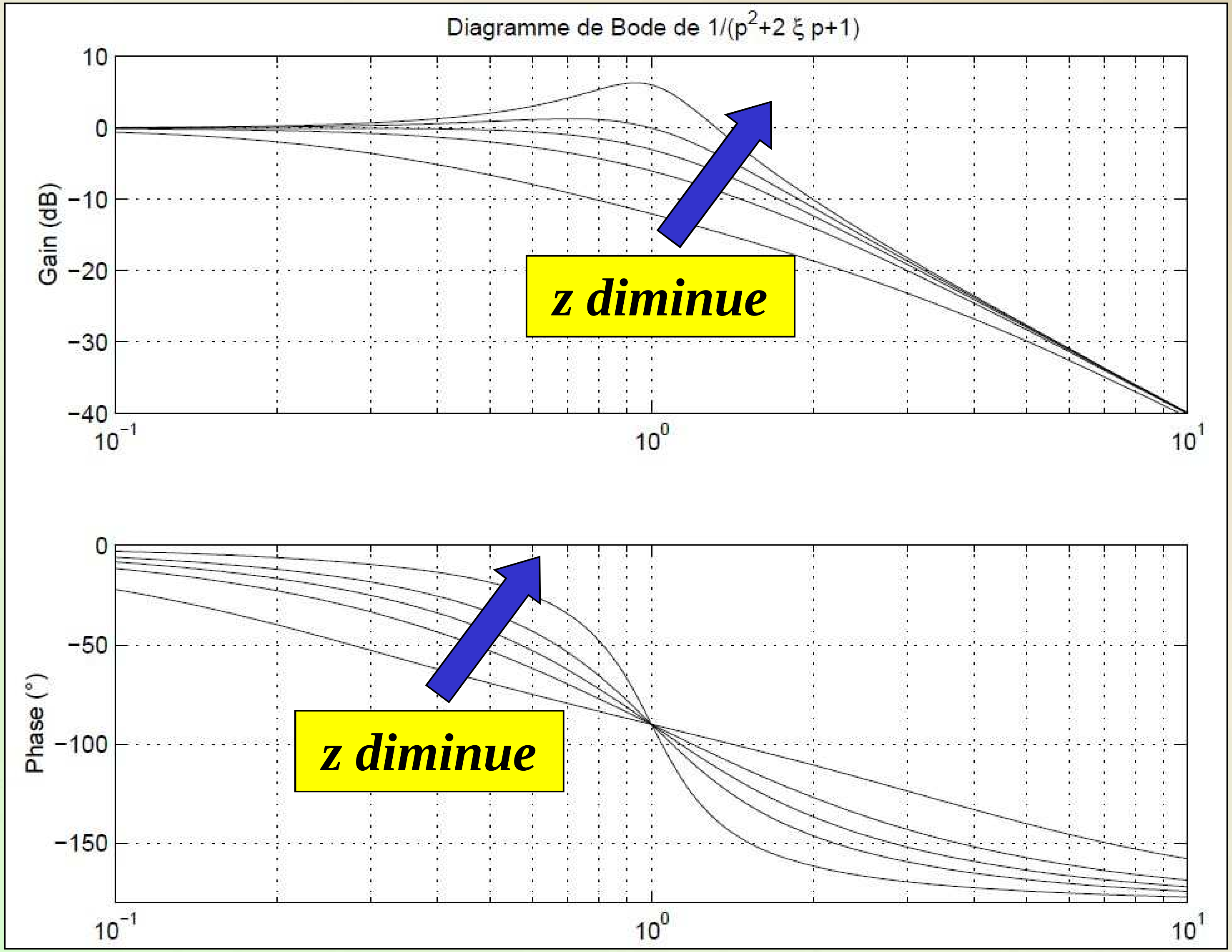
$$FT(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$

$$z > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Influence de z sur la résonance



FIN