SYSTEME DU PREMIER ORDRE

ETUDE TEMPORELLE

1) Equation différentielle

Un système est dit du premier ordre quand il est régi par l'équation différentielle suivante :

e(t)

Consigne d'entrée

$$\tau \times \frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

s (t)

Variable de sortie

Constante de temps

Gain statique

2) Fonction de transfert

$$\boxed{\tau \times \frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)}$$

Passons dans le domaine de Laplace en utilisant le théorème de la dérivation :

Nota : ***la fonction de transfert traduit l'évolution du système depuis une position d'équilibre donc les conditions initiales sont nulles.***

$$\Rightarrow \quad \tau \times p\; S(p) + S(p) = K \times E(p)$$

$$\Rightarrow \quad S(p) \times (\tau\, p + 1) = K \times E(p)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau\, p}}$$

Gain statique

Constante de temps

3) Etude de trois exemples

▶ ***Premier exemple :*** ***TD de l'asservissement en hauteur d'un bac tampon***

Bac tampon

sortie　　entrée

$h_c(t)$ Consigne de hauteur

$$\frac{S}{K.C.B.A} \times \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = h_c(t)$$

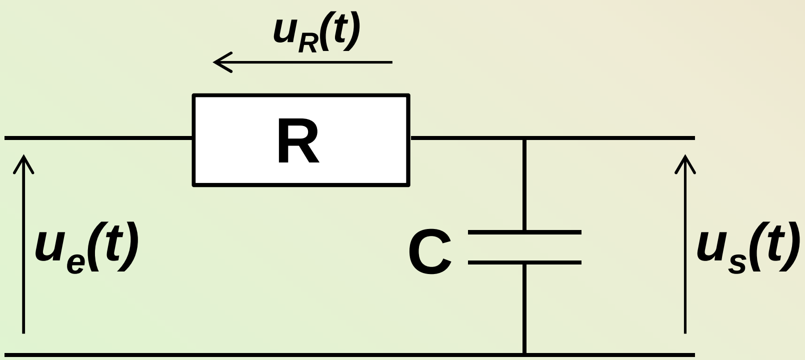
$h(t)$ Hauteur de présentation des tubes

$$\tau = \frac{S}{K.C.B.A}$$

$$K = 1$$

$$FT(p) = \frac{H(p)}{H_C(p)} = \frac{1}{1 + \frac{S}{KCBA} \times p}$$

▶ *Deuxième exemple :* circuit RC



$$\left\{\begin{array}{l} R: \text{ résistance électrique (en Ohm)} \\ C: \text{ capacité du condensateur (en Farad)} \\ q: \text{ charge du condensateur (en Coulomb)} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} q(t) = C\times u_s(t) \\ i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow i(t) = C\times\frac{du_s(t)}{dt}$$

$R\times i(t)$

or $u_e(t) = u_s(t) + u_R(t) = u_s(t) + RC\times\dfrac{du_s(t)}{dt}$

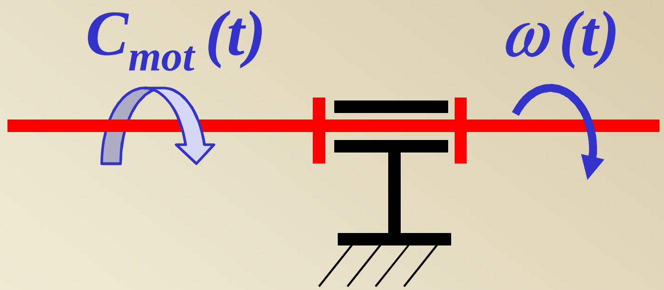
$\tau = RC$ $\quad$ $K = 1$

sortie $\quad$ entrée

$$\Rightarrow \boxed{RC\times\frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t)} \Rightarrow \boxed{FT(p) = \frac{U_S(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1+RC\,p}}$$

▶ *Troisième exemple :*

liaison pivot avec frottement



Hypothèses :

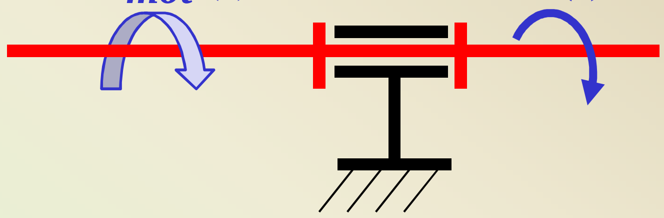
- ***On néglige les frottements secs au niveau de la liaison pivot.***
- ***On suppose des frottements fluides au niveau de la liaison pivot (coefficient f)***

  ➡ ***frottements proportionnels à la vitesse angulaire :*** $C_{rés}(t) = f \times \omega(t)$
- ***On suppose le centre de gravité de l'arbre sur l'axe de rotation.***
- ***On notera J l'inertie de l'arbre en rotation.***

1) Isolement : ***on isole l'arbre en rotation.***

2) Bilan des actions mécaniques extérieures :

Couple moteur ***Couple du poids*** ***Liaison pivot avec frottements fluides***



3) Principe fondamental de la dynamique :

$$C_{mot}(t) + 0 - C_{rés}(t) = J \times \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$C_{rés}(t) = f \times \omega(t)$

sortie — entrée

$$\frac{J}{f} \times \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{f} \times C_{mot}(t)$$

$$\tau = \frac{J}{f} \qquad K = \frac{1}{f}$$

$$FT(p) = \frac{\Omega(p)}{C_{mot}(p)} = \frac{\frac{1}{f}}{1 + \frac{J}{f}p}$$

4) Réponse à un échelon

$$\tau \times \frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

Prenons un échelon d'amplitude A $\Rightarrow$ $e(t) = A \times u(t)$

Fonction d'Heaviside

Utilisons le théorème de dérivation pour passer dans le domaine de Laplace

On cherche l'évolution d'un système depuis une position d'équilibre

$\Rightarrow$ ***les conditions initiales sont donc nulles***

$$\tau \times \frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t) \Rightarrow \tau \times p\,S(p) + S(p) = K \times \frac{A}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) \times (\tau\,p + 1) = \frac{K\,A}{p} \Rightarrow \boxed{S(p) = \frac{K\,A}{p \times (\tau\,p + 1)}}$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times (\tau\, p + 1)}$$

On a vu dans le cours sur les transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{1}{p(1+\tau\, p)} \rightsquigarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow s(t) = K\,A \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

<u>Nota :</u> on peut retrouver ce résultat différemment en faisant une décomposition en éléments simples de la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{\tau\, p + 1}$$

Degré du numérateur **<u>inférieur de 1</u>** à celui du dénominateur

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{\tau p + 1} = \frac{\alpha \times (\tau p + 1) + \beta \times p}{p \times (\tau p + 1)}$$

$$\boxed{S(p) = \frac{K A}{p \times (\tau p + 1)}}$$

$$= \frac{\alpha + p \times (\alpha \tau + \beta)}{p \times (\tau p + 1)} = \frac{K A}{p \times (\tau p + 1)}$$

Identifions les constantes α et β du numérateur :

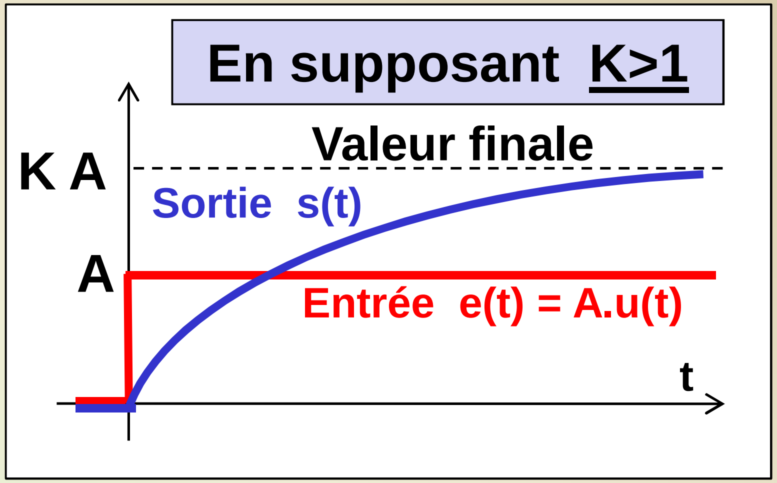
$$\begin{cases} \alpha = K A \\ \alpha . \tau + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\alpha . \tau = -K A \tau$$

D'où : $$S(p) = \frac{K A}{p} - \frac{K A \tau}{\tau p + 1}$$

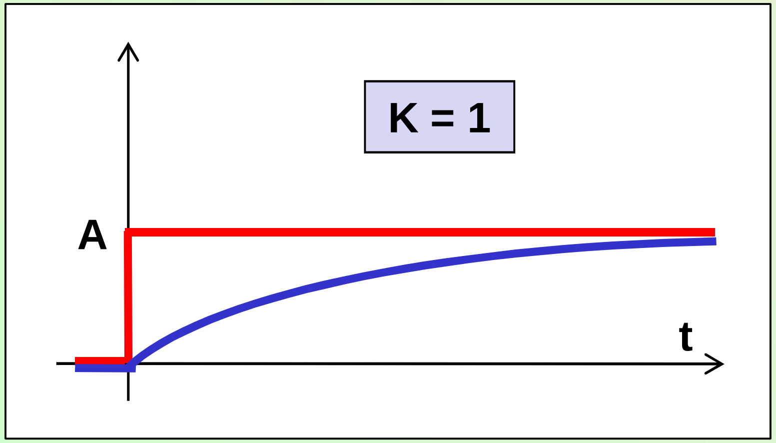
$$\Rightarrow \boxed{K A \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right)} \rightsquigarrow \boxed{s(t) = K A \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$$

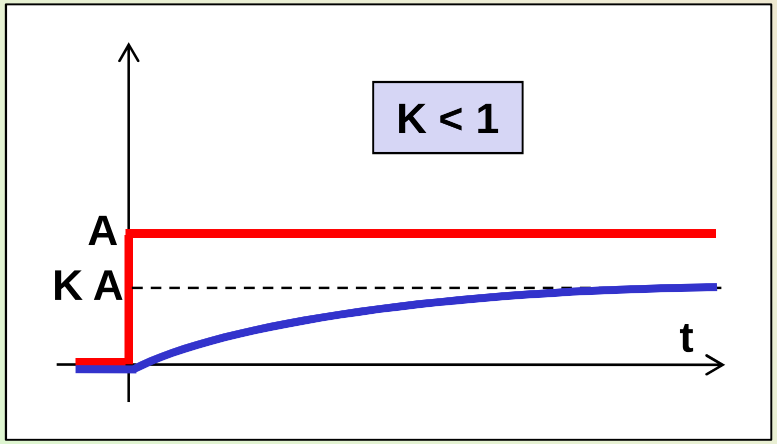
5) Représentation graphique de la réponse à un échelon

$$s(t) = K\,A \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



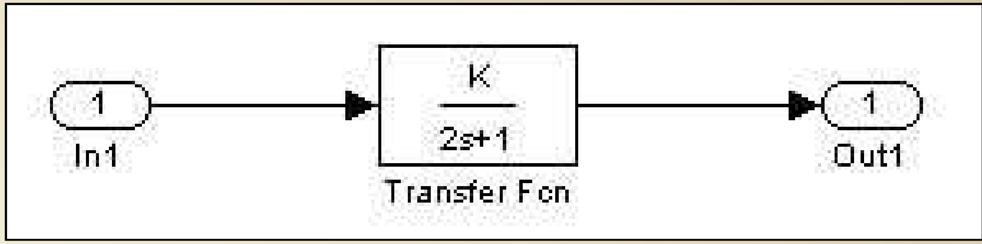
Nota : $\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = K\,A \times (1-0) = K\,A$

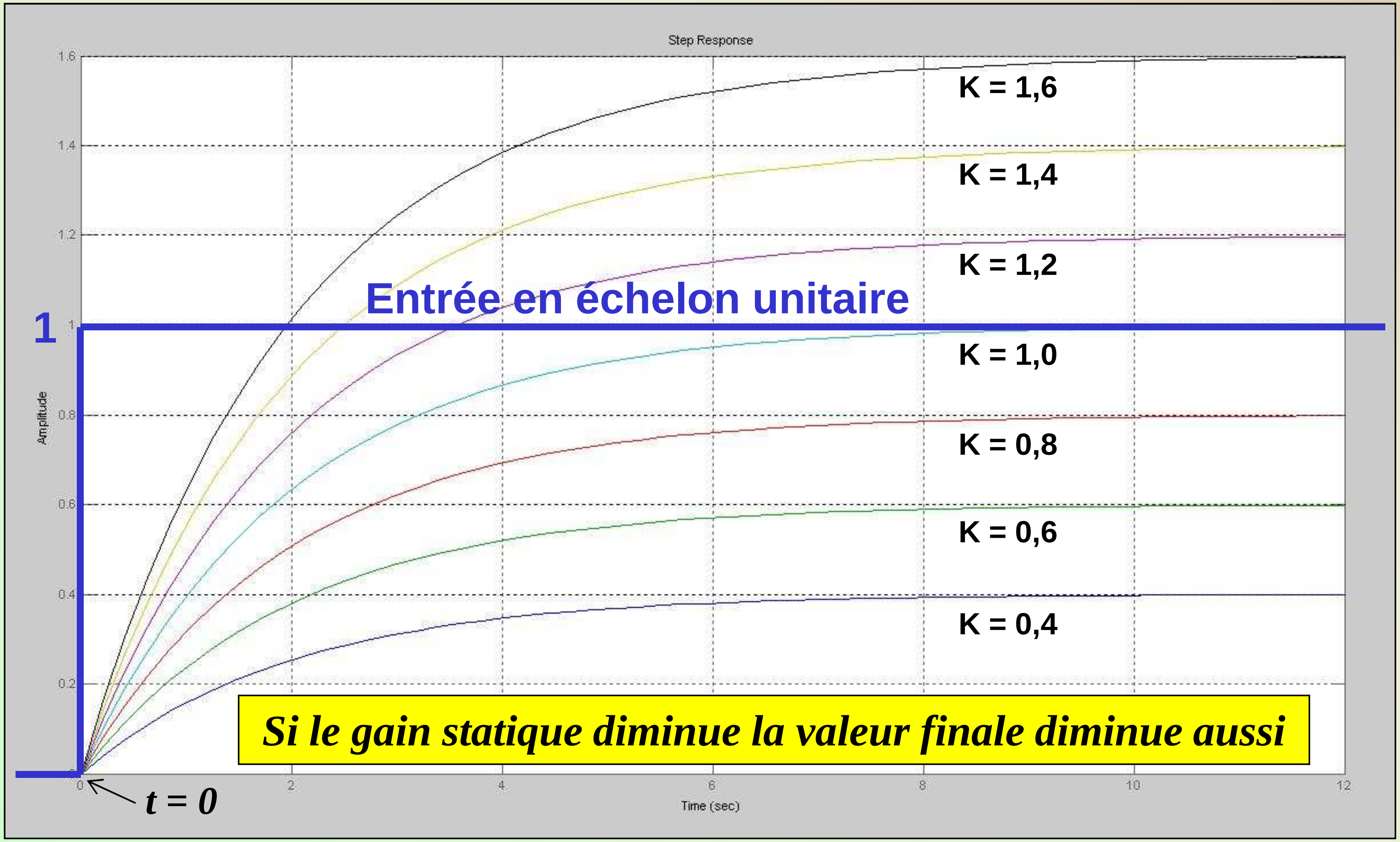




Influence du gain statique K

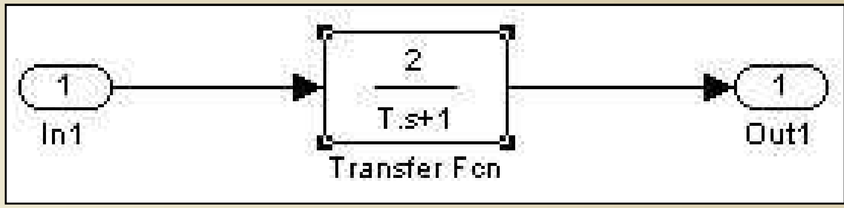
Réponse indicielle (échelon de 1)

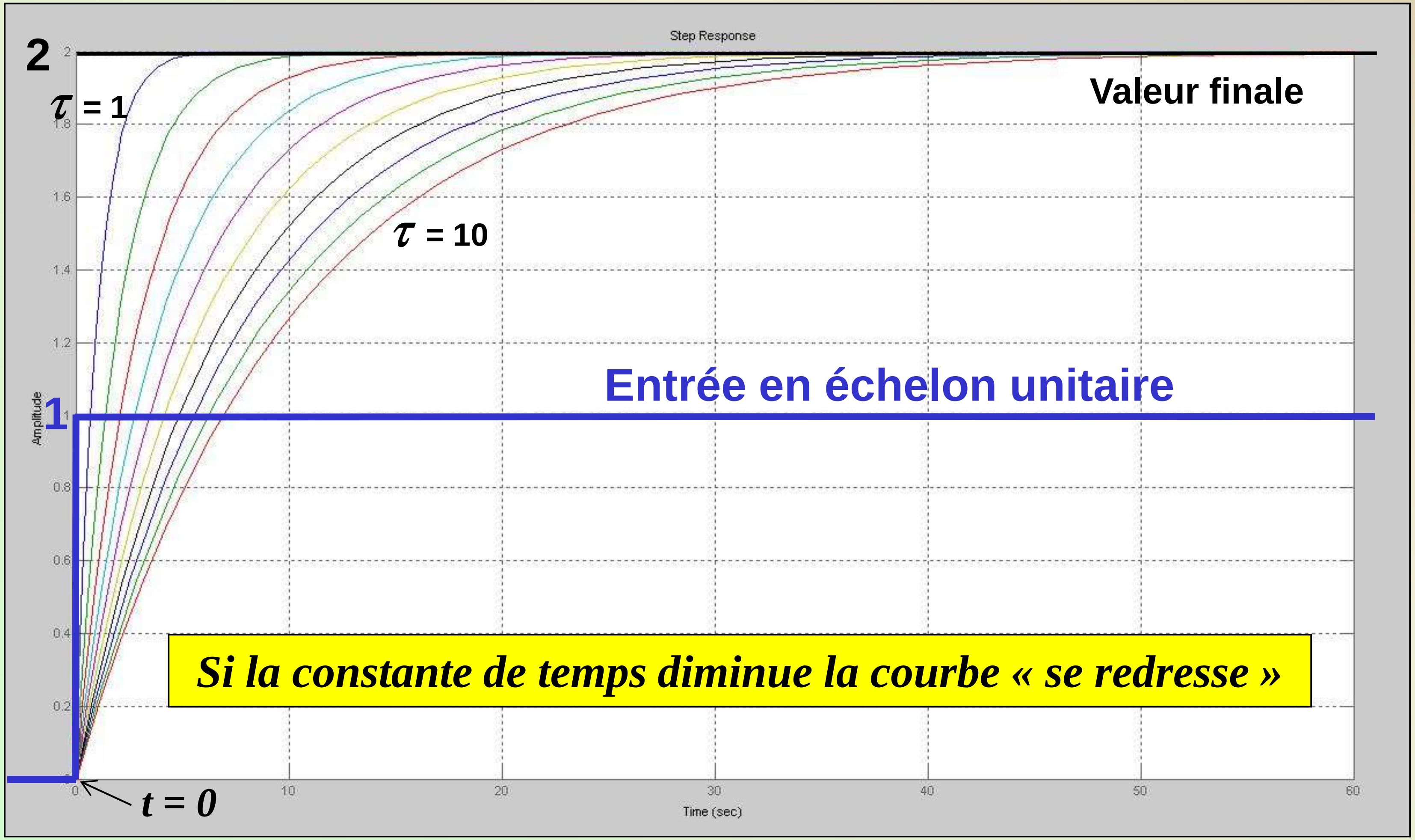




Influence de la constante de temps τ

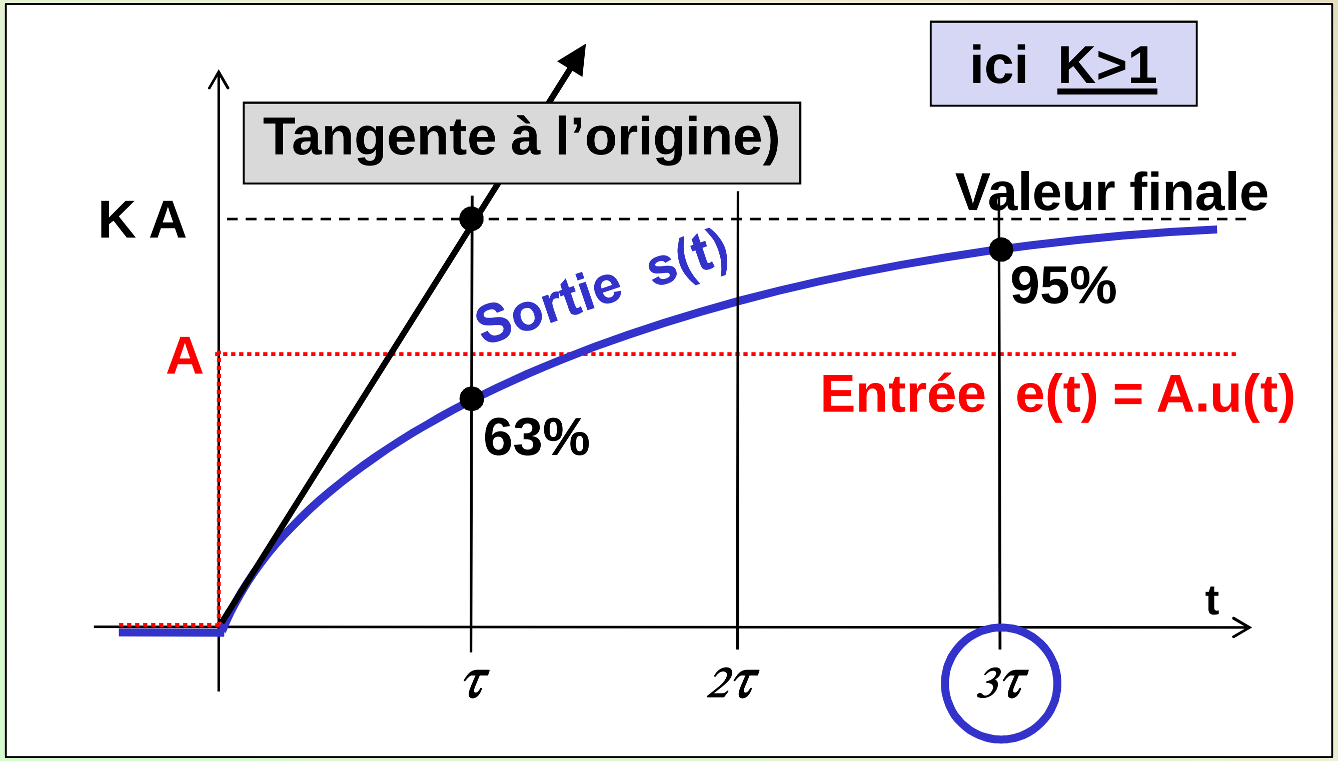
Réponse indicielle (échelon de 1)





Caractéristiques graphiques

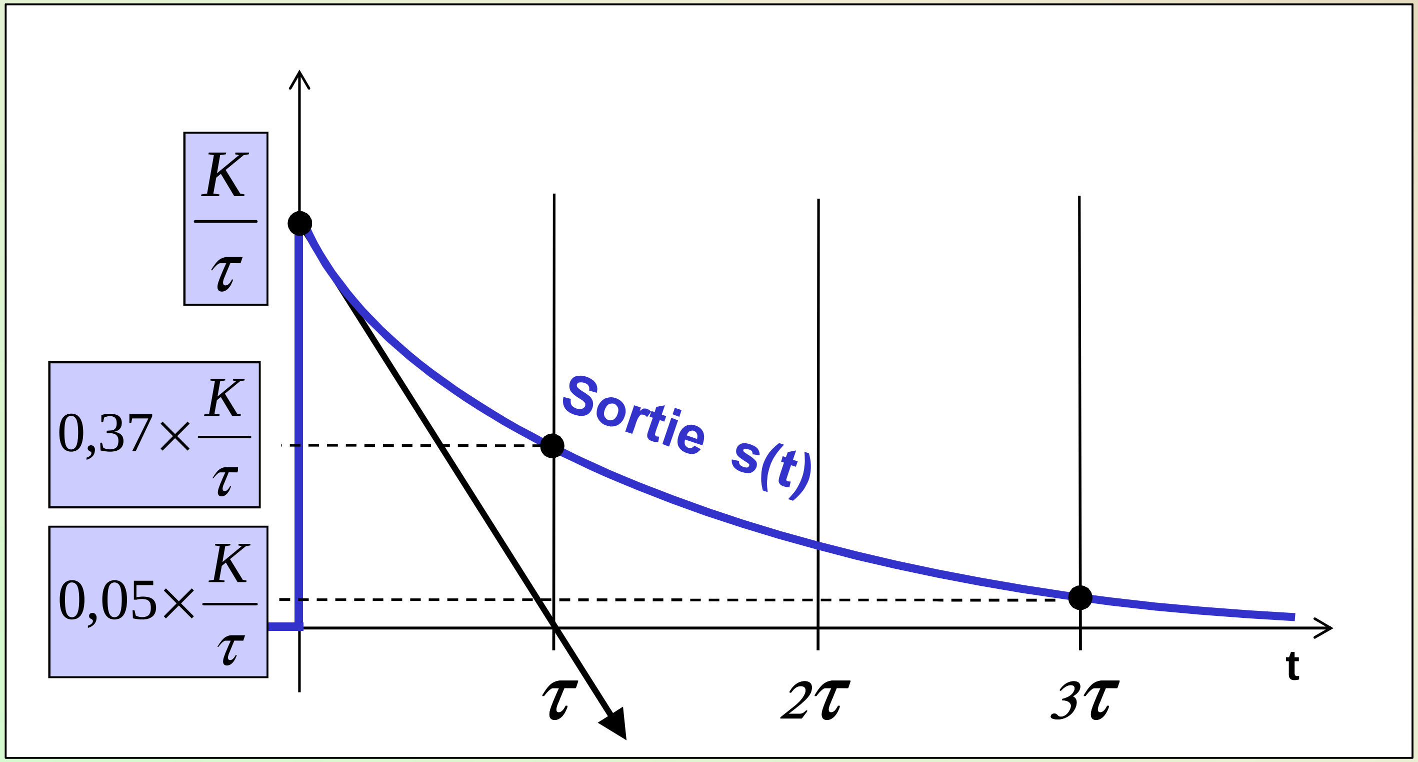
$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$



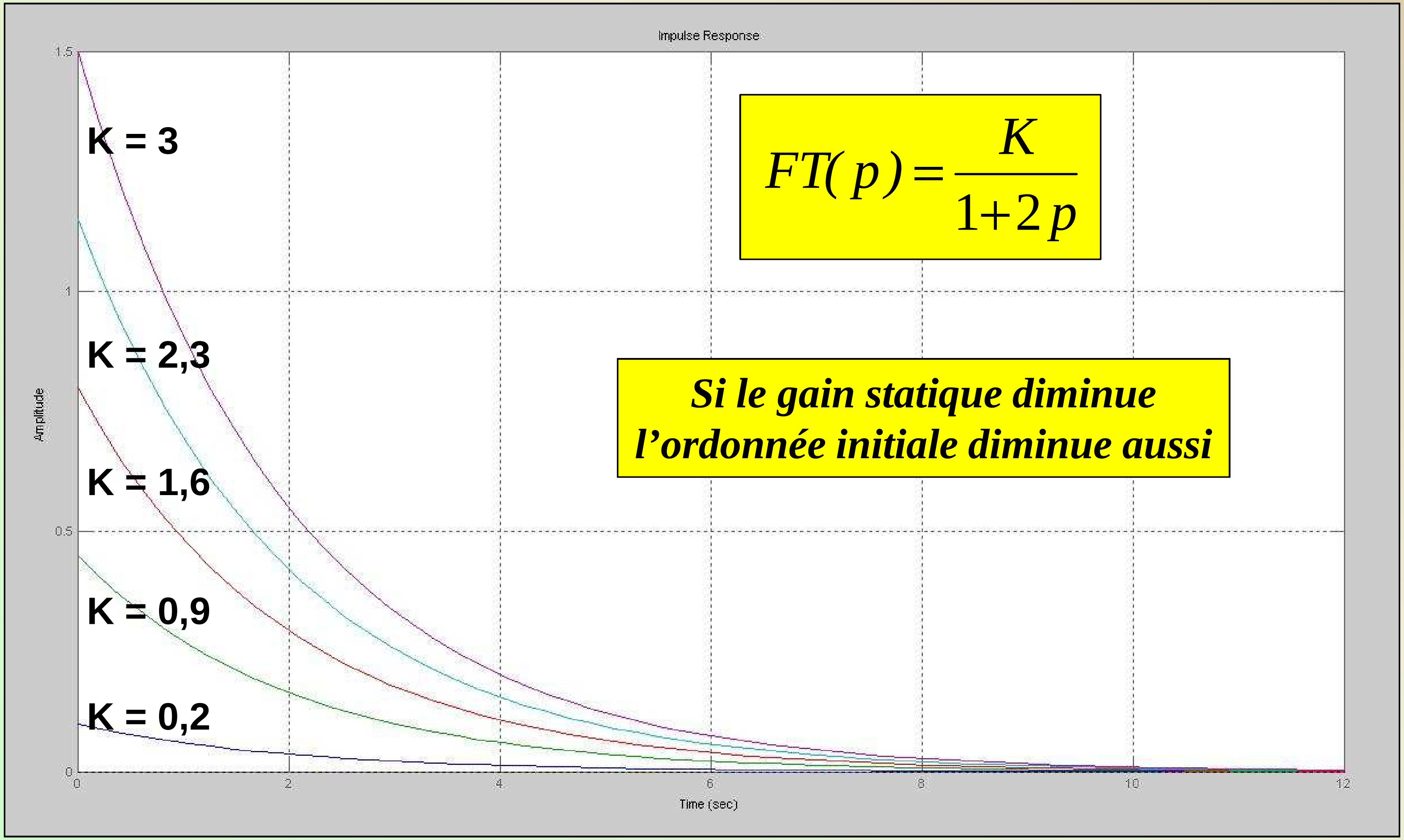
Temps de réponse à 5%

6) Réponse impulsionnelle

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau\, p}$$



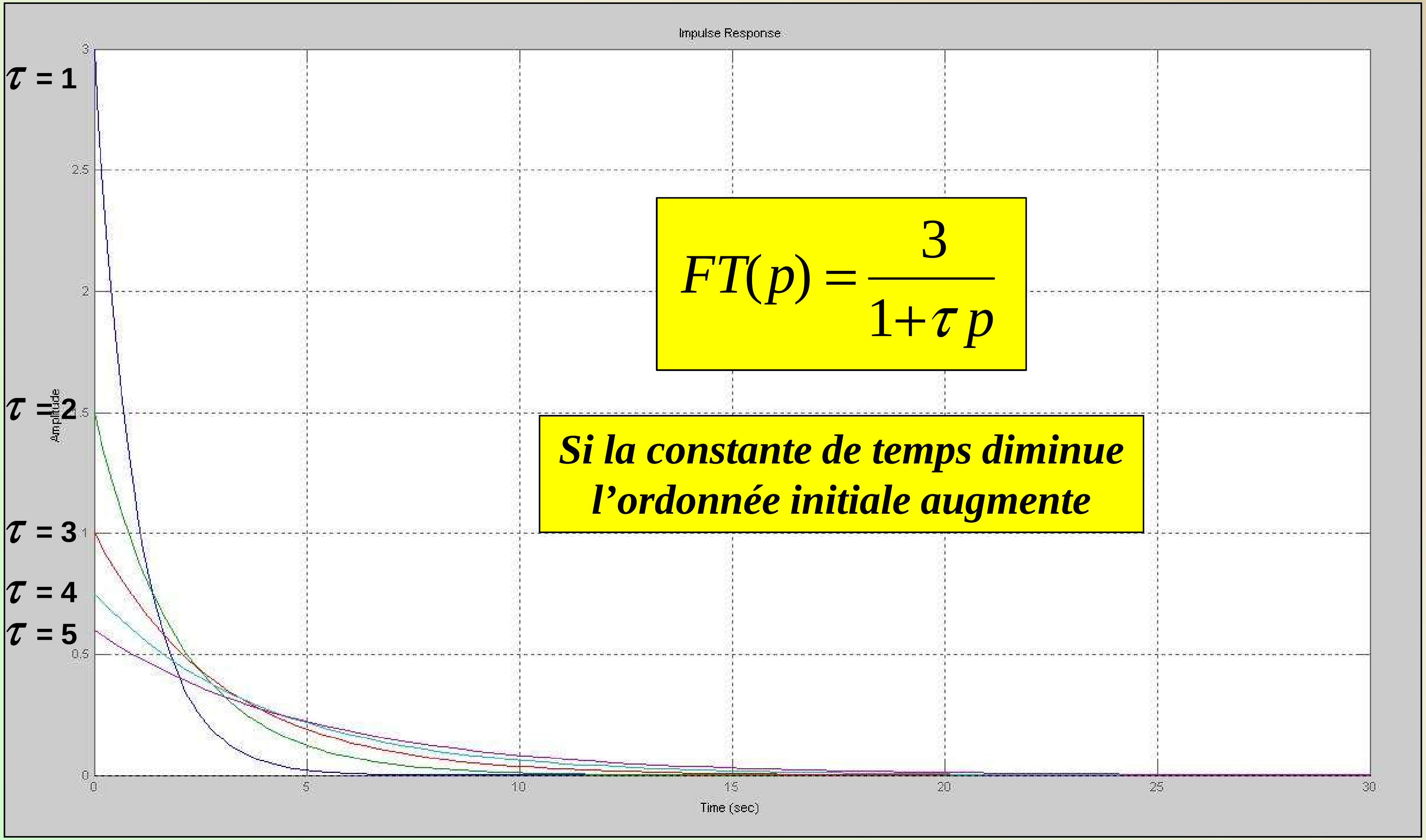
Influence du gain statique K



$$FT(p) = \frac{K}{1+2p}$$

Si le gain statique diminue l'ordonnée initiale diminue aussi

Influence de la constante de temps τ



$$FT(p) = \frac{3}{1+\tau p}$$

Si la constante de temps diminue l'ordonnée initiale augmente

FIN